有限グラフ上の乱歩

Random walks on a finite graph

倉田　久靖**

Hisayasu Kurata

概要

整数格子上の単純乱歩については古典的によく知られているが、ここでは一般の有限グラフ上の、必ずしも対称とは限らない乱歩について考察する．

1　はじめに

乱歩は、Brown 運動や拡散過程などの離散近似として、古くから数多くの研究がある（たとえば [2]）．本論文では、拡張された乱歩を扱う．

まず、古典的な乱歩について触れておく．d 次元ユークリッド空間の整数格子

$$\mathbb{Z}^d = \left\{ \left(x_j\right)_{j=1}^{d};\ \text{すべての } j \text{ について } x_j \text{ は整数} \right\}$$

で、隣接点は線分でつながれているものとする．ここで、$\mathbf{x} = \left(x_j\right)_{j=1}^{d} \in \mathbb{Z}^d$ と $\mathbf{y} = \left(y_j\right)_{j=1}^{d} \in \mathbb{Z}^d$ とが隣接点であるとは、ある j_0 について

$$y_j - x_j = \delta_{jj_0}$$

または

$$y_j - x_j = -\delta_{jj_0}$$

が成り立つことをいう．ただし、右辺は Kronecker の δ である．あるいは、$\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d$ と $\mathbf{y} \in \mathbb{Z}^d$ とが隣接点であるとは、第 j 成分が 1 で残りの成分がすべて 0 であるベクトル $\mathbf{e}_j$ を用いて、

$$\mathbf{y} - \mathbf{x} = \mathbf{e}_j \qquad \text{または} \qquad \mathbf{y} - \mathbf{x} = -\mathbf{e}_j$$

と書けることであると言っても良い．これにより、整数格子 $\mathbb{Z}^d$ を無向グラフであるとみなす．

次に、この整数格子に沿って移動する粒子を考える．すなわち、時刻 $t = 0$ に格子点 $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{Z}^d$ にあった粒子が、次の時刻 $t = 1$ には $\mathbf{x}_0$ の一つの隣接点 $\mathbf{x}_1 \in \mathbb{Z}^d$ に移る．一般に、時刻 t のとき粒子が $\mathbf{x}_t \in \mathbb{Z}^d$ にあるとすると、$\mathbf{x}_t$ と $\mathbf{x}_{t+1}$ は隣接点である．この移動が以下のように確率で定まるものとする．各 t と各 $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d$ と $\mathbf{x}$ の隣接点 $\mathbf{y} \in \mathbb{Z}^d$ について、時刻 t に粒子が $\mathbf{x}$ にあり、時刻 $t+1$ に粒子が $\mathbf{y}$ にある確率を $p(t, \mathbf{x}, \mathbf{y})$ とする．もちろん、

$$\sum_{\substack{\mathbf{y} \in \mathbb{Z}^d \\ \mathbf{y} \text{ は } \mathbf{x} \text{ の隣接点}}} p(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = 1 \tag{1}$$

である．この確率は一般には初期点 $\mathbf{x}_0$ にも依存する．

上の確率 $p(t, \mathbf{x}, \mathbf{y})$ が、$\mathbf{x}_0, t, \mathbf{x}$ のいずれにも依存しないとき、上記の粒子の移動を乱歩という．さらに確率 $p(t, \mathbf{x}, \mathbf{y})$ が、$\mathbf{x}_0, t, \mathbf{x}, \mathbf{y}$ のいずれにも依存しない時、すなわち

$$p(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2d}$$

のときは、単純乱歩という．この場合は確率が対称的であること、すなわち、

$$p(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = p(t, \mathbf{y}, \mathbf{x})$$

となることが特徴的である．

次に乱歩の拡張について考える．ひとつの拡張は、辺を増やすことである．すなわち、集合 $\mathcal{E} \subset \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d$ で

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathcal{E} \text{ と } (\mathbf{y}, \mathbf{x}) \in \mathcal{E} \text{ が同値}$$

を満たすものを取り、それを辺の集合と考えるのである．これにより $\left(\mathbb{Z}^d, \mathcal{E}\right)$ を無向グラフであるとみなす．すると、$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathcal{E}$ であることを、$\mathbf{y}$ が $\mathbf{x}$ の隣接点であることの定義とすれば、既に述べた乱歩と同様のことが考えられる．そして、移動の確率 $p(t, \mathbf{x}, \mathbf{y})$ が、初期点 $\mathbf{x}_0$ および t に依存しないときを考えるのである．この場合は、各点に接続する辺の数が点ごとに異なるから、確率 $p(t, \mathbf{x}, \mathbf{y})$ は必ず $\mathbf{x}$ に依存することを注意する．

*　原稿受理　平成 16 年 9 月 1 日

**　一般科目

さらに拡張しよう．ここまでの話で、$\mathbb{Z}^d$ がユークリッド空間に埋め込まれていることは必要ではなかった．すなわち、例えば２点間の距離や２辺間の角度などは不要である．そこで、抽象的なグラフ $(X, \mathcal{E})$ を考えよう．ここで、X は頂点の集合、$\mathcal{E}$ は辺の集合である．このグラフ上を粒子が移動すると考える．時刻 t に粒子が $\mathbf{x} \in X$ にあり、時刻 $t+1$ のとき粒子は $\mathbf{x}$ の隣接点 $\mathbf{y}$ にある確率を $p(t, \mathbf{x}, \mathbf{y})$ とする．ここで、$\mathbf{y} \in X$ が $\mathbf{x}$ の隣接点であるというのは、$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathcal{E}$ を満たすこととする．このとき、式 (1) と同様に

$$\sum_{\substack{\mathbf{y}\in X \\ (\mathbf{x},\mathbf{y})\in\mathcal{E}}} p(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = 1$$

が成り立つ．同じことであるから、$\mathcal{E} = X \times X$ が成り立つ場合、すなわち、$(X, \mathcal{E})$ が完全グラフである場合のみを考察すれば良い．

本論文では、X が有限集合であり、確率 $p(t, \mathbf{x}, \mathbf{y})$ が、t および初期点 $\mathbf{x}_0 \in X$ に依らないものについて考察する．このとき、この確率は行列およびそのべきとして扱うことができる．それを確率行列と呼ぶ．第 2 節では、この確率行列の固有値について考察する．その結果を用いて、第 3 節では、確率行列の Jordan 標準形について述べる．そして第 4 節で、十分な時間が経過した後の状態について述べる．それは、時間が無限に経過した状態として表される．最後に、第 5 節において、これらの応用について述べる．

2　確率行列と固有値

X を有限集合とする．点 $x \in X$ を出発した乱歩が、時刻 1 に点 $y \in X$ に移る確率を p_{xy} とすると、それらは

$$p_{xy} \geq 0、\qquad \sum_{y\in X} p_{xy} = 1 \tag{2}$$

を満たす．式 (2) を満たす p_{xy} を (x, y) 成分とする行列 $P = \left(p_{xy}\right)_{x,y\in X}$ を確率行列という．

補題 1. 二つの確率行列 P, Q について、積 PQ はまた確率行列である．

証明. $P = \left(p_{xy}\right)_{x,y\in X}$, $Q = \left(q_{xy}\right)_{x,y\in X}$ とする．積 PQ の (x, y) 成分を r_{xy} とすると、

$$r_{xy} = \sum_{z\in X} p_{xz} q_{zy}$$

である．明らかに $r_{xy} \geq 0$ である．また

$$\sum_{y\in X} r_{xy} = \sum_{y\in X}\sum_{z\in X} p_{xz} q_{zy} = \sum_{z\in X} p_{xz} \sum_{y\in X} q_{zy}$$

$$= \sum_{z\in X} p_{xz} = 1$$

となる．これは PQ が確率行列であることを示す． □

例 2. 確率行列

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 2/3 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

について

$$PQ = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 3/4 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$$P^2 = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & 1/6 & 1/2 \\ 1/6 & 0 & 5/6 \end{pmatrix}$$

$$Q^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

などは、確率行列である． □

点 $x \in X$ を出発した乱歩が、時刻 $t \in \mathbb{N}$ に点 $y \in X$ に移る確率を $p_{xy}^{(t)}$ と書く．

定理 3. $p_{xy}^{(t)}$ を (x, y) 成分とする行列は、P^t に等しい．

証明. 点 $x \in X$ を出発した乱歩が、時刻 1 に点 z を通過し、時刻 2 に点 $y \in X$ に移るとすると、その確率は $p_{xz}p_{zy}$ と書ける．したがって

$$p_{xy}^{(2)} = \sum_{z\in X} p_{xz} p_{zy}$$

である．右辺は P^2 の (x, y) 成分であるから、$t = 2$ の場合が導かれる．

時刻 $t-1$ までの主張が成り立つとする．点 $x \in X$ を出発した乱歩が、時刻 $t-1$ に点 z を通過し、時刻 t に点 $y \in X$ に移るとすると、その確率は $p_{xz}^{(t-1)} p_{zy}$ と書ける．したがって

$$p_{xy}^{(t)} = \sum_{z\in X} p_{xz}^{(t-1)} p_{zy}$$

である．帰納法の仮定により右辺は $P^{t-1}P$ の、したがって P^t の (x, y) 成分であるから、t の場合が導かれる．

したがって、数学的帰納法により、すべての t について主張は成り立つ． □

補題 4. P の一つの固有値は 1 で、その固有ベクトルの一つは全ての $x \in X$ に対する成分が 1 であるベクトルで与えられる．

証明. 全ての $x \in X$ に対する成分が 1 であるベクトルを $\mathbf{v}$ とすると、$P\mathbf{v}$ の x 成分は、式 (2) を用いて

$$\sum_{y \in X} p_{xy} 1 = 1$$

となることによる． □

補題 5. P の固有値を λ とすると、

$$|\lambda| \leq 1$$

である．

証明. 一般に転置行列の固有値は、元の行列の固有値と一致するから、λ は ${}^{t}P$ の固有値と考えることができる．その固有ベクトルを $\mathbf{v} = (v_x)_{x \in X}$ とする．すなわち、$\lambda\mathbf{v} = {}^{t}P\mathbf{v}$ とする．この式の両辺の x 成分を比較すれば、

$$\lambda v_x = \sum_{y \in X} p_{yx} v_y$$

となるから、式 (2) を用いて、

$$\begin{aligned} |\lambda| \sum_{x \in X} |v_x| &= \sum_{x \in X} |\lambda v_x| = \sum_{x \in X} \left| \sum_{y \in X} p_{yx} v_y \right| \\ &\leq \sum_{x \in X} \sum_{y \in X} \left| p_{yx} v_y \right| = \sum_{y \in X} \sum_{x \in X} p_{yx} \left| v_y \right| \\ &= \sum_{y \in X} \left| v_y \right| \end{aligned}$$

を得る．$\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ であるから、$|\lambda| \leq 1$ となる． □

例 6. 例 2 の確率行列 P の固有値は

$$1, \frac{-3 - \sqrt{3}}{6}, \frac{-3 + \sqrt{3}}{6}$$

であり、その絶対値は

$$1, \frac{3 + \sqrt{3}}{6}, \frac{3 - \sqrt{3}}{6}$$

である．また、例 2 の確率行列 Q の固有値は

$$1, \frac{-1 + i}{2}, \frac{-1 - i}{2}$$

であり、その絶対値は

$$1, \sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2$$

である． □

絶対値が 1 の固有値について調べるために、次の値を定義する．$x \in X$ に対し

$$A_x = \left\{ t \in \mathbb{N};\ p_{xx}^{(t)} > 0 \right\}$$

とし、A_x の最大公約数を d_x とする．

補題 7. 十分大きい $T_x \in \mathbb{N}$ を取れば、$t \geq T_x$ なるすべての t について $p_{xx}^{(td_x)} > 0$ となる．

証明. 一般に $P^{s+t} = P^s P^t$ であるから、任意の $z \in X$ について、

$$p_{xy}^{(s+t)} = \sum_{w \in X} p_{xw}^{(s)} p_{wy}^{(t)} \geq p_{xz}^{(s)} p_{zy}^{(t)}$$

であることに注意する．

d_x の定義から、A_x の元 $t_1, \ldots, t_m$ を取り、それらの最大公約数が d_x であるようにできる．このとき、整数 $l_1, \ldots, l_m$ を

$$l_1 t_1 + \cdots + l_m t_m = d_x$$

となるように取れる．今、$L_1 + l_1, \ldots, L_m + l_m$ がすべて自然数になるように、十分大きな自然数 $L_1, \ldots, L_m$ を取り、

$$T_x = (L_1 t_1 + \cdots + L_m t_m)^2$$

とおく．$t_1, \ldots, t_m$ の取り方から、

$$p_{xx}^{(t_1)} > 0, \ldots, p_{xx}^{(t_m)} > 0$$

であるから、

$$\begin{aligned} p_{xx}^{\left(\sqrt{T_x}\right)} &= p_{xx}^{(L_1 t_1 + \cdots + L_m t_m)} \\ &\geq \left(p_{xx}^{(t_1)}\right)^{L_1} \cdot \cdots \cdot \left(p_{xx}^{(t_m)}\right)^{L_m} > 0 \end{aligned}$$

となる．したがって、$\sqrt{T_x} \in A_x$ を得る．また

$$\sqrt{T_x} + d_x = (L_1 + l_1)\, t_1 + \cdots + (L_m + l_m)\, t_m$$

から、

$$\begin{aligned} & p_{xx}^{\left(\sqrt{T_x} + d_x\right)} \\ &= p_{xx}^{((L_1 + l_1) t_1 + \cdots + (L_m + l_m) t_m)} \\ &\geq \left(p_{xx}^{(t_1)}\right)^{L_1 + l_1} \cdot \cdots \cdot \left(p_{xx}^{(t_m)}\right)^{L_m + l_m} \\ &> 0 \end{aligned}$$

となり、$\sqrt{T_x} + d_x \in A_x$ を得る．

さて、$t \geq T_x$ とし、t を $\sqrt{T_x}$ で割った商と余りをそれぞれ a, b とする．すなわち、$t = a\sqrt{T_x} + b$ で、$a \geq \sqrt{T_x}, 0 \leq b < \sqrt{T_x}$ とする．このとき

$$t d_x = \left(a \sqrt{T_x} + b\right) d_x$$

$$= b\left(\sqrt{T_x} + d_x\right) + (ad_x - b)\sqrt{T_x}$$

である．$ad_x - b > 0$ より、

$$\begin{aligned} p_{xx}^{(td_x)} &\geq \left(p_{xx}^{\left(\sqrt{T_x}+d_x\right)}\right)^b \left(p_{xx}^{\left(\sqrt{T_x}\right)}\right)^{ad_x-b} \\ &> 0 \end{aligned}$$

を得る． □

例 8. $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ とする．例 2 の確率行列 P については

$$\begin{aligned} A_{x_1} &= \mathbb{N} \setminus \{1\} & d_{x_1} &= 1 \\ A_{x_2} &= \mathbb{N} \setminus \{1\} & d_{x_2} &= 1 \\ A_{x_3} &= \mathbb{N} \setminus \{1\} & d_{x_3} &= 1 \end{aligned}$$

また、例 2 の確率行列 Q については

$$\begin{aligned} A_{x_1} &= \mathbb{N} \setminus \{1, 2, 4\} & d_{x_1} &= 1 \\ A_{x_2} &= \mathbb{N} \setminus \{1\} & d_{x_2} &= 1 \\ A_{x_3} &= \mathbb{N} \setminus \{1\} & d_{x_3} &= 1 \end{aligned}$$

となる． □

次の例では、$d_x > 1$ となる $x \in X$ が存在する．

例 9. $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ とし、確率行列

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

について計算すれば

$$\begin{aligned} A_{x_1} &= \{3, 6, 9, \ldots\} & d_{x_1} &= 3 \\ A_{x_2} &= \{3, 6, 9, \ldots\} & d_{x_2} &= 3 \\ A_{x_3} &= \{3, 6, 9, \ldots\} & d_{x_3} &= 3 \\ A_{x_4} &= \mathbb{N} & d_{x_4} &= 1 \end{aligned}$$

となる． □

定理 10. λ を絶対値が 1 である P の固有値とすると、ある $x \in X$ について $\lambda^{T_x d_x} = 1$ となる．

証明. λ に対する固有ベクトルを $\mathbf{v} = (v_x)_{x \in X}$ とする．$|v_x| = \max_{y \in X} |v_y|$ を満たす $x \in X$ を取ると、$\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ より、$v_x \neq 0$ である．また、

$$I_x = \left\{y \in X;\ p_{xy}^{(T_x d_x)} > 0\right\}$$

とおくと、補題 7 により $x \in I_x$ である．$\lambda^{T_x d_x}\mathbf{v} = P^{T_x d_x}\mathbf{v}$ の両辺の x 成分を比較して、

$$\lambda^{T_x d_x} v_x = \sum_{y \in X} p_{xy}^{(T_x d_x)} v_y = \sum_{y \in I_x} p_{xy}^{(T_x d_x)} v_y$$

を得る．$P^{T_x d_x}$ は確率行列であるから、

$$\begin{aligned} |v_x| = \left|\lambda^{T_x d_x} v_x\right| &= \left|\sum_{y \in I_x} p_{xy}^{(T_x d_x)} v_y\right| \\ &\leq \sum_{y \in I_x} \left|p_{xy}^{(T_x d_x)} v_y\right| && (3) \\ &= \sum_{y \in I_x} p_{xy}^{(T_x d_x)} \left|v_y\right| \\ &\leq \sum_{y \in I_x} p_{xy}^{(T_x d_x)} |v_x| && (4) \\ &= |v_x| \end{aligned}$$

となる．したがって、式 (3) および式 (4) ではともに等号が成り立たなければならない．

まず式 (4) で等号が成り立つから、$y \in I_x$ のとき

$$\left|v_y\right| = |v_x|$$

となる．特に、$v_y \neq 0$ である．さらに式 (3) で等号が成り立つから、$p_{xy}^{(T_x d_x)} \neq 0$ および $v_y \neq 0$ に注意すれば、$p_{xy}^{(T_x d_x)} v_y$ の偏角が一定でなければならないことがわかる．ところが、$p_{xy}^{(T_x d_x)} > 0$ であるから、それは v_y の偏角が一定であることを意味する．$x \in I_x$ であるから、v_y の偏角と v_x の偏角は等しい．以上から、$y \in I_x$ のとき $v_y = v_x$ となる．したがって

$$\lambda^{T_x d_x} v_x = \sum_{y \in I_x} p_{xy}^{(T_x d_x)} v_x = v_x$$

となり、$\lambda^{T_x d_x} = 1$ を得る． □

例 11. 例 9 の確率行列 R の固有値は、1 の原始 3 乗根 $\omega = \left(-1 + \sqrt{3}i\right)/2$ を用いて、

$$1, \omega, \omega^2, 1/2$$

と書ける．$d_{x_1} = 3$ であるから、定理 10 は成り立つ． □

3 Jordan 標準形

P の Jordan 標準形を J とし、その変換行列を U とする．すなわち、

$$J = U^{-1} P U \tag{5}$$

とする．

補題 12. λ を P の固有値で絶対値が 1 のものとする．P の固有多項式における λ の多重度は、λ の固有空間の次元と等しい．

証明. P の固有多項式における λ の多重度が、λ の固有空間の次元より大きいとすると、λ に対応する Jordan 細胞の一つは大きさが 2 以上になる．すなわち、ある $k \geq 2$ について、Jordan 標準形 J は k 次行列

$$C = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & & \\ & \lambda & 1 & & & \\ & & \lambda & \ddots & & \\ & & & \ddots & 1 & \\ & & & & \lambda & 1 \\ & & & & & \lambda \end{pmatrix}$$

を含む．また、これに対応する X の元を $x_1, \dots, x_k$ であるとし、C^t の $\left(x_i, x_j\right)$ 成分を $c^{(t)}_{x_i x_j}$ と書く．簡単な計算により

$$c^{(t)}_{x_i x_j} = \begin{cases} \binom{t}{j-i}\lambda^{t-j+i} & i \leq j \leq i+t \text{ のとき} \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

となるから、$t/2 \leq t-k+1$ かつ $i \leq j$ のとき

$$\begin{aligned} \left|c^{(t)}_{x_i x_j}\right| &= \frac{t\,(t-1)\cdot\cdots\cdot(t-j+i+1)}{(j-i)!} \\ &\leq \frac{t^{j-i}}{(j-i)!} \end{aligned}$$

および

$$\left|c^{(t)}_{x_i x_j}\right| \geq \frac{(t/2)^{j-i}}{(j-i)!}$$

を得る．

U^{-1} の (x, y) 成分を u^{xy} と書くことにする．等式 $U^{-1}P^t = J^t U^{-1}$ の両辺の (x_1, y) 成分を比較して、

$$\sum_{z\in X} u^{x_1 z} p^{(t)}_{zy} = \sum_{j=1}^{k} c^{(t)}_{x_1 x_j} u^{x_j y}$$

となる．ここで、$p^{(t)}_{zy} \leq 1$ に注意すれば、

$$\left|\sum_{z\in X} u^{x_1 z} p^{(t)}_{zy}\right| \leq \sum_{z\in X} |u^{x_1 z}|$$

を得る．一方、

$$\begin{aligned} &\left|\sum_{j=1}^{k} c^{(t)}_{x_1 x_j} u^{x_j y}\right| \\ &\qquad \geq \left|c^{(t)}_{x_1 x_k} u^{x_k y}\right| - \sum_{j=1}^{k-1} \left|c^{(t)}_{x_1 x_j} u^{x_j y}\right| \\ &\qquad \geq \frac{t^{k-1}}{2^{k-1}\,(k-1)!}\,|u^{x_k y}| - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{t^{j-1}}{(j-1)!}\,|u^{x_j y}| \end{aligned}$$

となる．したがって

$$\frac{t^{k-1}}{2^{k-1}\,(k-1)!}\,|u^{x_k y}| \leq \sum_{j=1}^{k-1} \frac{t^{j-1}}{(j-1)!}\,|u^{x_j y}| + \sum_{z\in X} |u^{x_1 z}|$$

を得る．両辺を t^{k-1} で割り、$t \to \infty$ とすると $|u^{x_k y}| \leq 0$、すなわち

$$u^{x_k y} = 0$$

を得る．これは U^{-1} の第 x_k 行がすべて 0 であることを意味し、したがって U が正則であることに反する． □

２つの正方行列 A, B の直和を $A \oplus B$ と書く．すなわち

$$A \oplus B = \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$$

とおく．ここまでの結果を総合すれば次の定理を得る．

定理 13. P の固有値の内、絶対値が 1 のものを ω_j（$j = 1, 2, \dots, k$）とし、その重複度を n_j とする．このとき、P の Jordan 標準形 J は、

$$J = \omega_1 E_{n_1} \oplus \omega_2 E_{n_2} \oplus \cdots \oplus \omega_k E_{n_k} \oplus \Lambda$$

と書ける．ただし、E_n は n 次単位行列を表し、Λ は絶対値が 1 より小さい固有値に対する Jordan 細胞の直和である．

例 14. 例 2 の確率行列 P の Jordan 標準形は、変換行列

$$U = \begin{pmatrix} 1 & -6+2\sqrt{3} & -6-2\sqrt{3} \\ 1 & 9-5\sqrt{3} & 9+5\sqrt{3} \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

を用いて

$$J = U^{-1}PU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-3-\sqrt{3}}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-3+\sqrt{3}}{6} \end{pmatrix}$$

と得られる．例 2 の確率行列 Q の Jordan 標準形は、変換行列

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 2i & -2i \\ 1 & -1-i & -1+i \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

を用いて

$$J = U^{-1}QU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1+i}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1-i}{2} \end{pmatrix}$$

と得られる．例 9 の確率行列 R の Jordan 標準形は、変換行列

$$U = \begin{pmatrix} 1 & -3\omega-2 & -3\omega^2-2 & 0 \\ 1 & \omega+3 & \omega^2+3 & 0 \\ 1 & 2\omega-1 & 2\omega^2-1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

を用いて

$$J = U^{-1}RU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

と得られる． □

絶対値が 1 より小さい固有値に対応する Jordan 標準形の部分は必ずしも対角化されない．

例 15. 確率行列

$$S = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 3/4 & 1/4 \\ 0 & 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$$

の固有値は

$$1, 1/2$$

である．1 に対する固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

であり、1/2 に対する固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

であり、これだけしかない．したがって S は対角化できない．実際、S の Jordan 標準形 J は

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

を用いて

$$J = U^{-1}PU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

と得られる． □

4 漸近行列

第 2 節で定義した $\{d_x\}_{x\in X}$ の最小公倍数を D とする．

定理 16. 行列 L および Π を

$$L = E_{n_1+n_2+\cdots+n_k} \oplus O$$

$$\Pi = ULU^{-1}$$

で定める．ただし、O は Λ と同じ次数の零行列とする．このとき、$0 \le s < D$ なる s について、

$$\lim_{t\to\infty} P^{tD+s} = P^s\Pi$$

となる．すなわち、P^t は

$$\Pi, P\Pi, P^2\Pi, \ldots, P^{D-1}\Pi$$

に漸近する．

証明. 定理 10 により、λ が絶対値 1 の固有値ならば、$t \ge \max_{x\in X} T_x$ のとき、

$$\lambda^{tD} = 1$$

となる．したがって、定理 13 より

$$J^{tD} = E_{n_1+n_2+\cdots+n_k} \oplus \Lambda^{tD}$$

を得る．Λ は、絶対値が 1 より小さい固有値に対する Jordan 細胞の直和であるから、

$$\lim_{t\to\infty} \Lambda^t = O.$$

したがって

$$\lim_{t\to\infty} J^{tD} = L$$

となる．よって

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} P^{tD+s} &= \lim_{t\to\infty} UJ^{tD+s}U^{-1} \\ &= \lim_{t\to\infty} UJ^sU^{-1} \cdot UJ^{tD}U^{-1} \\ &= UJ^sU^{-1} \cdot ULU^{-1} = P^s\Pi \end{aligned}$$

を得る． □

例 17. 例 9 の確率行列 R を考える．まず例 9 で述べたことから、$D = 3$ であることが分かる．一方

$$\lim_{t\to\infty} R^{3t} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2/7 & 4/7 & 1/7 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lim_{t\to\infty} R^{3t+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/7 & 2/7 & 4/7 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lim_{t\to\infty} R^{3t+2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4/7 & 1/7 & 2/7 & 0 \end{pmatrix}$$

であるから、行列 R^t は上記の 3 つの行列に漸近する． □

定理 18. $n_1+n_2+\cdots+n_k=1$ のとき、行列 Π の成分 π_{xy} は x によらない．

証明. $n_1+n_2+\cdots+n_k=1$ のときとは、絶対値が 1 である固有値が一つのみの場合である．補題 4 により、その固有値は 1 であり、対応する固有ベクトルは全ての成分が 1 であるベクトルである．したがって、Jordan 標準形 J の $(1,1)$ 成分が 1 であるとし、また、変換行列 U の第 1 列は、上記のベクトル $\mathbf{v}$ であるとしてよい．このとき L は、$(1,1)$ 成分が 1 で、その他の成分は 0 である．よって、積 UL の第 1 列はすべて 1、その他はすべて 0 となる．したがって、U^{-1} の (i,j) 成分を u^{ij} と書けば、

$$\Pi = ULU^{-1} = \begin{pmatrix} u^{11} & u^{12} & \dots & u^{1n} \\ u^{11} & u^{12} & \dots & u^{1n} \\ \hdotsfor{4} \\ u^{11} & u^{12} & \dots & u^{1n} \end{pmatrix}$$

となる． □

例 19. 例 2 の確率行列 P, Q、および例 9 の確率行列 R は、いずれも定理 18 が適用できる．実際

$$\lim_{t\to\infty} P^t = \begin{pmatrix} 5/13 & 2/13 & 6/13 \\ 5/13 & 2/13 & 6/13 \\ 5/13 & 2/13 & 6/13 \end{pmatrix}$$

$$\lim_{t\to\infty} Q^t = \begin{pmatrix} 1/5 & 2/5 & 2/5 \\ 1/5 & 2/5 & 2/5 \\ 1/5 & 2/5 & 2/5 \end{pmatrix}$$

$$\lim_{t\to\infty} S^t = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

となる． □

5 応用

5.1 あみだくじ

あみだくじの縦線の数を n とし、縦線を $x_1,\dots,x_n$ とする．また、横線を t 本入れるとし、上から順に $h_1,\dots,h_t$ とする．横線 h_k の入る場所は $n-1$ ヶ所あるが、それぞれの入る確率は k に依らず一定で、$p'_1,\dots,p'_{n-1}$ であるとする．当然、$p'_1+\cdots+p'_{n-1}=1$ である．ここで、$p_{x_ix_j}$ を以下のように定義する．まず、$i=1$ のとき

$$p_{x_1x_j} = \begin{cases} 1-p'_1 & j=1 \text{ のとき} \\ p'_1 & j=2 \text{ のとき} \\ 0 & \text{その他の } j \text{ とき} \end{cases}$$

とし、$1<i<n$ のとき

$$p_{x_ix_j} = \begin{cases} p'_{i-1} & j=i-1 \text{ のとき} \\ 1-p'_{i-1}-p'_i & j=i \text{ のとき} \\ p'_i & j=i+1 \text{ のとき} \\ 0 & \text{その他の } j \text{ とき} \end{cases}$$

とする．さらに $i=n$ のとき

$$p_{x_nx_j} = \begin{cases} p'_{n-1} & j=n-1 \text{ のとき} \\ 1-p'_{n-1} & j=n \text{ のとき} \\ 0 & \text{その他の } j \text{ とき} \end{cases}$$

と定める．$p_{x_ix_j}$ は横線を 1 本通過する時に、x_i から x_j に移る確率である．

公平なあみだくじは、x_i から出発して x_j に至る確率 $p^{(t)}_{x_ix_j}$ が、i,j に依らないものである．では標準的なあみだくじの場合はどうであろうか．この場合、$p'_i=1/(n-1)$ である．例えば、$n=5$ のときの確率行列は

$$P = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$$

となる．このとき簡単な計算により

$$\lim_{t\to\infty} P^t = \begin{pmatrix} 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 \\ 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 \\ 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 \\ 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 \\ 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 \end{pmatrix}$$

であるから、t が十分大きければ、公平なあみだくじになる．では、t がどの程度大きくなればよいのだろうか．例えば、$t=5,10,15,20$ のとき、P^t の近似値は

$$P^5 = \begin{pmatrix} 0.451 & 0.322 & 0.161 & 0.054 & 0.012 \\ 0.322 & 0.29 & 0.215 & 0.119 & 0.054 \\ 0.161 & 0.215 & 0.248 & 0.215 & 0.161 \\ 0.054 & 0.119 & 0.215 & 0.29 & 0.322 \\ 0.012 & 0.054 & 0.161 & 0.322 & 0.451 \end{pmatrix}$$

$$P^{10} = \begin{pmatrix} 0.336 & 0.281 & 0.195 & 0.117 & 0.071 \\ 0.281 & 0.251 & 0.202 & 0.15 & 0.117 \\ 0.195 & 0.202 & 0.206 & 0.202 & 0.195 \\ 0.117 & 0.15 & 0.202 & 0.251 & 0.281 \\ 0.071 & 0.117 & 0.195 & 0.281 & 0.336 \end{pmatrix}$$

表 1: 当たる確率の最大／最小．単位は %

	$t = n$	$t = 2n$	$t = 3n$	$t = 4n$
$n = 5$	45／1	34／7	28／12	25／15
$n = 10$	49／0	36／0	30／ 0	26／ 0
$n = 20$	51／0	37／0	31／ 0	27／ 0
$n = 40$	52／0	38／0	31／ 0	27／ 0

$$P^{15} = \begin{pmatrix} 0.281 & 0.249 & 0.199 & 0.15 & 0.12 \\ 0.249 & 0.231 & 0.2 & 0.169 & 0.15 \\ 0.199 & 0.2 & 0.201 & 0.2 & 0.199 \\ 0.15 & 0.169 & 0.2 & 0.231 & 0.249 \\ 0.12 & 0.15 & 0.199 & 0.249 & 0.281 \end{pmatrix}$$

$$P^{20} = \begin{pmatrix} 0.249 & 0.23 & 0.2 & 0.17 & 0.151 \\ 0.23 & 0.219 & 0.2 & 0.181 & 0.17 \\ 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 \\ 0.17 & 0.181 & 0.2 & 0.219 & 0.23 \\ 0.151 & 0.17 & 0.2 & 0.23 & 0.249 \end{pmatrix}$$

となる．縦線が 5 本のあみだくじで、横線が 20 本ならば、十分な数に見える．だが実際には、もし当たりが端 x_1 にあった場合、x_1 を選ぶときの当たる確率は 25%、x_5 を選ぶときの当たる確率は 15% となり、大幅に違うのである．いくつかの n と t について、当たる確率の最大と最小を表 1 にまとめた．この表に依れば、縦線が 40 本のあみだくじにおいて、当たる確率は平均 2.5% であるが、実際には、横線が 160 本あったとしても、当たりの場所と選んだ場所との関係により、当たる確率は最大 27%、最小 0% であることがわかる．

続いて、より一般のあみだくじについて考察しよう．横線は隣り合わない 2 本の縦線の間にも入れてよいことにする．さらに、1 本の縦線について、自分自身とつなぐ横線も入れてよいことにする．縦線 x_i と x_j の間に横線が入る確率を $p'_{x_i x_j}$ とし、$p_{x_i x_j}$ を

$$p_{x_i x_j} = \frac{p'_{x_i x_j}}{\sum_{k=1}^{n} p'_{x_i x_k}}$$

で定める．$p_{x_i x_j}$ を $\left(x_i, x_j\right)$ 成分とする行列 P は、横線を 1 本通過する時に、x_i から x_j に移る確率を表す確率行列である．

ここでも標準的なものを考えてみる．すなわち、$p'_{x_i x_j}$ は一定で、したがって $p'_{x_i x_j} = 1/n^2$ となる場合である．このとき

$$p_{x_i x_j} = 1/n$$

となる．したがってこの場合、理論上は横線が 1 本だけでも、公平なあみだくじになる．

実際の場面では、縦線の数、横線の数、当たりの場所が分かっているあみだくじを想定すると良いであろう．こうすれば、普通のあみだくじの場合の結果も、拡張されたあみだくじの場合の結果も納得できるものとなる．

5.2　カードのシャッフル

$2n$ 枚のカードを切ることを考える．それは、i 番目のカードが何番目に行くかを決めることである．それが確率で定まっているとしよう．すなわち、i 番目のカードが j 番目に行く確率を p_{ij} とし、それを (i, j) 成分とする行列を P とする．シャッフルの目的は、上記の変換を t 回実施し、i 番目のカードが j 番目に行く確率 $p_{ij}^{(t)}$ が i にも j にも依らないようにすること、すなわち

$$p_{ij}^{(t)} = \frac{1}{2n}$$

とすることである．

さて、通常単にシャッフルといえば、カードを上下２組に分け、それらを交互に組み合わせる方法をいう．この組み合わせ方を以下のように定める．まず、カードを n 枚ずつの二つの組、上組と下組に分ける．次に、上組または下組を確率 1/2 で選び、その最下のカードを山に置く．さらに、上組または下組を確率 1/2 で選び、その最下のカードを山の上に置く．この操作を繰り返して、上組または下組がなくなったら、残りの組のカードを山の上に置く．これに対応する確率行列の成分 p_{ij} は、$i \le n$ のとき

$$p_{ij} = \begin{cases} \binom{2n-j}{n-i} 2^{j-2n-1} & i < j \le i + n \text{ のとき} \\ \sum_{k=1}^{n} p_{k,k+1} & j = i \text{ のとき} \\ 0 & \text{その他のとき} \end{cases}$$

となり、$i > n$ のとき

$$p_{ij} = \begin{cases} \binom{2n-j}{2n-i} 2^{j-2n-1} & i - n < j \le i \text{ のとき} \\ \sum_{k=1}^{n} p_{k,k+1} & j = i - n \text{ のとき} \\ 0 & \text{その他のとき} \end{cases}$$

となる．

例えば、$n = 3$ のとき、確率行列は

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 3/16 & 3/16 & 1/8 & 0 & 0 \\ 0 & 5/16 & 3/16 & 1/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/8 & 1/8 & 1/4 & 1/2 \\ 1/2 & 3/16 & 3/16 & 1/8 & 0 & 0 \\ 0 & 5/16 & 3/16 & 1/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/8 & 1/8 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$$

となる．このとき簡単な計算により

$$\lim_{t\to\infty} P^t = \begin{pmatrix} 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \end{pmatrix}$$

となるから、t が十分大きければ、シャッフルの目的に到達する．P^t の近似値は例えば、$t = 3$ のとき

$$\begin{pmatrix} 0.23 & 0.171 & 0.171 & 0.159 & 0.135 & 0.135 \\ 0.16 & 0.188 & 0.171 & 0.176 & 0.17 & 0.135 \\ 0.109 & 0.141 & 0.159 & 0.165 & 0.195 & 0.23 \\ 0.23 & 0.171 & 0.171 & 0.159 & 0.135 & 0.135 \\ 0.16 & 0.188 & 0.171 & 0.176 & 0.17 & 0.135 \\ 0.109 & 0.141 & 0.159 & 0.165 & 0.195 & 0.23 \end{pmatrix}$$

$t = 4$ のとき

$$\begin{pmatrix} 0.195 & 0.168 & 0.168 & 0.163 & 0.153 & 0.153 \\ 0.168 & 0.175 & 0.168 & 0.17 & 0.166 & 0.153 \\ 0.137 & 0.157 & 0.163 & 0.167 & 0.181 & 0.195 \\ 0.195 & 0.168 & 0.168 & 0.163 & 0.153 & 0.153 \\ 0.168 & 0.175 & 0.168 & 0.17 & 0.166 & 0.153 \\ 0.137 & 0.157 & 0.163 & 0.167 & 0.181 & 0.195 \end{pmatrix}$$

$t = 5$ のとき

$$\begin{pmatrix} 0.179 & 0.167 & 0.167 & 0.165 & 0.161 & 0.161 \\ 0.169 & 0.17 & 0.167 & 0.168 & 0.166 & 0.161 \\ 0.152 & 0.163 & 0.165 & 0.167 & 0.174 & 0.179 \\ 0.179 & 0.167 & 0.167 & 0.165 & 0.161 & 0.161 \\ 0.169 & 0.17 & 0.167 & 0.168 & 0.166 & 0.161 \\ 0.152 & 0.163 & 0.165 & 0.167 & 0.174 & 0.179 \end{pmatrix}$$

となる．各成分の 1/6 との差は、$t = 4$ の場合で最大約 3%、$t = 5$ の場合で最大約 1% である．

続いて、いわゆるトランプについて考察しよう．ジョーカーを除く 52 枚をシャッフルする．すなわち $n = 26$ の場合を考察する．この場合の確率行列 P は、52 次正方行列であるので、その全体を示すことはできないが、例えば

$$\begin{aligned} p_{11} &= \frac{1}{2} \\ p_{12} &= \frac{15801325804719}{281474976710656} \\ p_{13} &= \frac{15801325804719}{281474976710656} \\ p_{14} &= \frac{967428110493}{17592186044416} \end{aligned}$$

などとなる．さて、P^4 を計算すれば、その成分のうち、最大になるのは $(1, 1)$ 成分と $(27, 1)$ 成分であり、その近似値は 0.071088、最小になるのは $(26, 1)$ 成分と $(52, 1)$ 成分であり、その近似値は 0.002267 であることが分かる．同様に P^5 の成分の最大値は 0.043961、最小値は 0.007567、さらに P^6 の成分の最大値は 0.031063、最小値は 0.012487 である．従って、P^t の各成分と 1/52 との差は、$t = 4$ の場合で最大約 5%、$t = 5$ の場合で最大約 2%、そして $t = 6$ の場合で最大約 1% である．すなわち、枚数が増えても比較的少ない回数のシャッフルで、目的に到達できることが分かる．

参考文献

[1] R. Coleman, **確率過程**, 理工系・例題解法, 共立出版, 1976, 石井 恵一 訳.

[2] G. Polya, *Über eine Aufgabe der Wahrscheinlichkeitrechnung betreffend die Irrfahrt im Strassennetz*, Math. Ann. **84** (1921), 149–160.

[3] 魚返　正, **確率論**, 近代数学講座, 朝倉書店, 1970.

[4] 小谷　眞一, **測度と確率２**, 岩波講座 現代数学の基礎, 岩波書店, 1997.