

三角形分割模型の確率過程量子化

Stochastic quantization method for the Causal Dynamical Triangulation model

川邊 博**

Hiroshi KAWABE

概要

Causal Dynamical Triangulation (CDT) による 2 次元面の三角形分割模型はその連続極限が 2 次元量子重力と同等であり、世界面上での弦の場の理論を記述するものと期待されている。ここでは、CDT を行列模型から構成し、これに確率過程量子化法を適用することで弦の場の理論を導き、その直観的な意味を考察する。また、この模型が弦理論特有の代数構造をもつことを確認する。

1. はじめに

超弦理論は自然界に存在する 4 つの相互作用の統一的な記述を目指す理論の中で、もっとも有望な候補である。弦理論では、素粒子の実体は点ではなく 1 次元的な広がりをもつ線（弦）と考えるため、その移動や相互作用の経歴は二次元面（世界面）をつくる。開いた弦は端をもつ曲面内、閉じた弦は筒型の曲面上で運動することになり、弦の生成・消滅をひきおこす相互作用によって、世界面の幾何学的性質は複雑化する。弦の性質の解明には、弦の相互作用による非摂動的効果の理解が重要で、そのためには弦の場の理論を構築する必要がある。

一方、現実の 4 次元から単純化された 2 次元の量子重力理論の時空は、動的三角形分割によってつくられる離散的時空の連続極限と同等であり、その三角形分割（格子化）は行列模型で定式化されることが知られている [1]。 (図 1) このとき、無数の三角形から構成された離散的世界面上で、三角形の辺を連結して作った一つの多角形は閉じた弦に対応する [2]。世界面上での多角形の弦の変形は、弦を構成する一つの辺で起こる。これは行列模型において、一つの行列に確率過程の時間発展を施すことに起因する、弦を表す行列の時間発展として表される [3]。確率過程で実現可能な変形が、弦において実際に起こりうる現象に対応する。例えば、長さ L_1 のある弦が時間 t の後に長さ L_2 の弦になる確率は、それを実現する三角形分割のしかた（格子配位）の総数と関わる。

従来よく扱われていた二次元面の動的三角形分割 (DT) では 4 次元への拡張に困難があるとされているのに対して、CDT は、格子配位に制限を加えることで改善をはかろうとしたものである [4]。具体的には、2 次元面上で時

間 Δt が 1 ステップずつ等間隔で進む模型である。ある時刻で閉じた弦を表す多角形のループ（ループ変数）と、離散的な前後の時刻のループ変数との間隔が三角形の高さに等しいものである。この模型では、どの三角形もその底辺はいずれかの時間の閉じた弦の一部となっている。

今回の報告では、上記の CDT の性質を有する三角形分割模型を数式として実現する行列模型を探し、これに確率過程量子化法の適用を試みる。この手法の利点は、確率過程にループの変形が直観的に理解しやすい形で表されることである [5]。また、これから模型のもつ対称性に関連するループ方程式 (Schwinger-Dyson 方程式) を導く。また、ループの関数として表される任意の物理量の時間発展から、生成子として Fokker-Planck のハミルトニアンを読み取ることができる。弦の相互作用を記述するこの生成子が、従来のいろいろな行列模型がもっていた弦理論特有の対称性であるピラソロ代数を満たすこと [2] を確かめた。今回の目的は、行列模型を通して、弦の場の理論の直観的理解を得ることに重点を置いたので、離散的な模型に話をとどめておき、連続極限までは議論しないものとする。また、弦の消滅に関する期待値であるディスク振幅など、種々の物理量を計算する目的においてはループの空間に対して（ラプラス変換でつながる）双対空間で扱う場合が便利であるが、議論が抽象的になってしまうため、本報告ではループ空間のみで考察を進める。以下の構成は、第 2 節で今回扱う CDT を概観し、第 3 節でそれを構成する行列模型を構築する。第 4 節ではこの行列模型に確率過程量子化法を適用し、ループ変数の時間発展はループ変数だけで閉じた表現になることを確かめる。また、これから第 5 節は時間発展の生成子どうしの交換関係がピラソロ代数で閉じることを示す。最後に第 6 節で、まとめと今後の課題を述べる。

* 原稿受理 平成 22 年 10 月 1 日

** 一般科目

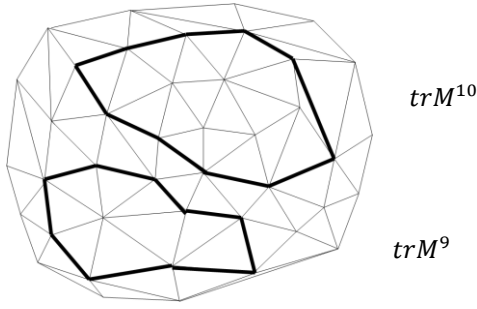


図1 三角形分割された面上の2つの閉じた弦
三角形の辺の長さを1とすれば、長さ10の弦
(trM^{10})と長さ9の弦(trM^9)を示す。

2. Causal Dynamical Triangulation (CDT)

閉じた弦が時間とともに変形しているようすは、時間軸をたとえば上方向にとって、単位時間が経過するごとにその形を等時間面の中に描き、これらを曲面でつなぐことで表せる。この曲面を弦の世界面といい、縮んだり広がったり歪んだりするような単純な弦の変形の世界面は筒状になる。(図2) いま、時空に最小単位の長さ・間隔が存在するものとして、弦を、最小単位の長さの線を連結したものと考え、「連続的」(に長さが変わる弦)に対して離散的なループをイメージする。離散的時間の、時刻 t と $t+1$ における2つの弦の各部分は三角形の二辺で直接つながれる。世界面を構成する三角形はすべて、その1本の辺(即ち2個の頂点)は片方の時間のループ上に存在し、残る1個の頂点はもう一方の時間のループ上にあるということを基本にするような統計力学模型を考える。これが Causal Dynamical Triangulation (CDT) という三角形分割法である。(図3) ループを構成するこれらの辺をリンクといい、リンクのつなぎ目の点をサイトという。1本のリンクは次の時間における1個のサイトとつながる。複数のリンクが1個のサイトにつながる場合もある。また、1個のサイトは次の時間における0~ ∞ のリンクにつながる可能性があり、これらが等確率であるという模型である。

たとえば、時刻 t におけるループが n 本のリンクからなる n 角形で、時刻 $t+1$ でのループは m 本のリンクからなる m 角形であるとすれば、その間を $n+m$ 枚の三角形がつないでいることになる。この1種類の三角形を用いた「すべてのループ間の埋め方の総数」に g^{n+m} の重みをかけたものが

$$G(n, m; t=1) = g^{n+m} \frac{1}{n+m} C_{n+m} C_n \quad (1)$$

で表わされる。ここで C は組合せを表し、定数 g は1枚の三角形に1つ付随するものとする。これは「時間1の

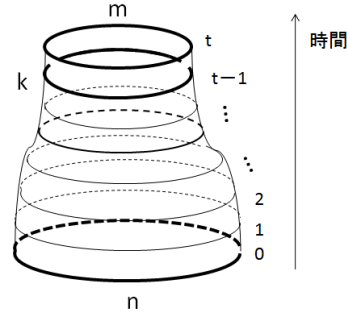


図2 CDTにおける弦の伝播
時間 t で長さ n から長さ m になる過程の一つ。時刻 $t-1$ で長さ k の状態を経由しているようすを示す。

間に、長さ n のループから長さ m のループに変化する」伝播関数であり、この変化がおこる確率と関係する。また、これは時間 t の間の伝播関数

$$G(n, m; t) = \sum_{k=1}^{\infty} k G(n, k; t-1) G(k, m; 1) \quad (2)$$

に拡張される。これを2ループ振幅という。ただし、

$$G(n, m; 0) = \delta_{n,m} \quad (3)$$

とする。また、長さ n のループが将来、分裂や結合の相互作用をいっさいすることなく変形のみを経て最終的に消滅する現象についての伝播関数は、2ループ振幅において、未来のすべての時間でループ(境界)の長さが0に縮まったものの総和

$$W(n) = \sum_{t=1}^{\infty} G(n, m=0, t) \quad (4)$$

で表わされる。これをディスク振幅という。

3. 行列模型

この節では CDT の定式化を試みる。まず、 $U(N)$ 対称な $N \times N$ 行列 $(M_{tt'})_{ij}$ を考える。行列の成分を表わす添え字は $i, j = 1, 2, 3, \dots, N$ であり、 t, t' は、行列に対応する三角形の辺が時間 t と t' をつなぐ行列であることを意味する別の添え字である。CDT にあわせるために、 t, t' に関して行列は

$$M_{tt'} = \begin{cases} A_t & (t' = t) \\ B_t & (t' = t+1) \\ B_t^\dagger & (t' = t-1) \\ 0 & (\text{その他の場合}) \end{cases} \quad (5)$$

に分類されるものとする。ただし、 A_t はエルミート行列 ($A_t^\dagger = A_t$) である。

模型の作用は

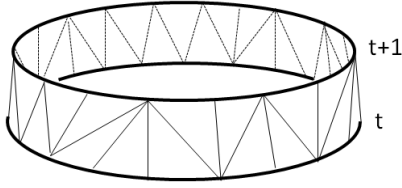


図3 CDTにおける三角形分割と弦離散的単位時間における伝播の様子を示す。

$$S = -\frac{1}{2} \text{tr} \sum_{t,t'} M_{tt'} M_{t't} + \frac{g}{3\sqrt{N}} \text{tr} \sum_{t,t',t''} M_{tt'} M_{t't''} M_{t''t} \quad (6)$$

とする。一つの行列は三角形の一つの辺に対応するとし、三角形の頂角が集めた頂点に行列の添え字 i, j が付随していると考えてよい。第2項は三つの辺で閉じた三角形を示し、第1項は三角形の辺の接合に関与する。式(6)の作用は式(5)によって

$$S = -\frac{1}{2} \text{tr} \sum_t (A_t^2 + 2B_t B_t^\dagger) + \frac{g}{\sqrt{N}} \text{tr} \sum_t (A_t B_t B_t^\dagger + A_{t+1} B_t^\dagger B_t) \quad (7)$$

となる。2行目の項は時間 t と $t+1$ のループを結ぶ三角形と逆三角形にそれぞれ対応する。(図4)

分配関数は

$$Z \equiv \int \mathcal{D}M e^{S[M]} = \int \mathcal{D}A \mathcal{D}B \mathcal{D}B^\dagger e^{S[A, B, B^\dagger]} \quad (8)$$

で定義する。ただし、添え字 t, t' を省略した表記である。 B, B^\dagger についての積分のみを実行して

$$Z = \int \mathcal{D}A \mathcal{D}A^\dagger e^{S_{\text{eff}}[A]} \quad (9)$$

とすれば有効作用として、

$$\begin{aligned} S_{\text{eff}} &= -\frac{1}{2} \text{tr} \sum_t A_t^2 \\ &\quad - \text{tr} \sum_t \log \left\{ 1 - \frac{g}{\sqrt{N}} (A_t \times 1_{t+1} + 1_t \times A_{t+1}) \right\} \\ &= -\frac{1}{2} \text{tr} \sum_t A_t^2 \\ &\quad + \sum_t \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{n+m} \left(\frac{g}{\sqrt{N}} \right)^{n+m} c_{n+m} \text{tr} A_t^n \text{tr} A_{t+1}^m \end{aligned} \quad (10)$$

が得られる。

ここで時間 t における長さ n のループ変数を

$$\phi_t(n) = \frac{1}{N} \text{tr} \left(\frac{A_t}{\sqrt{N}} \right)^n \quad (11)$$

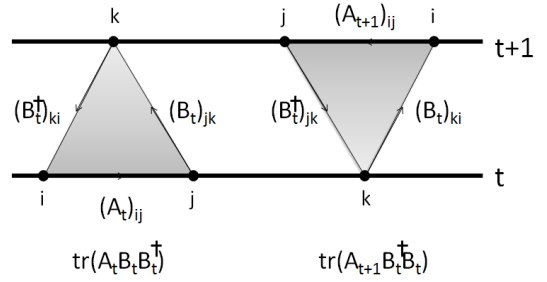


図4 作用の3次の項に対応する三角形

で定義すると、式(10)の最終形の第2行は

$$N^2 \sum_t \sum_{n,m=0}^{\infty} G(n, m; 1) \phi_t(n) \phi_{t+1}(m) \quad (12)$$

で、有効作用は確かに時間1の間におけるすべての可能なループ変数の伝播を含んでいることになり、ループ変数のみで構成された有効モデルが得られたことになる。そして、 $G(n, m; 1)$ はループ変数 $\phi_t(n)$ と $\phi_{t+1}(m)$ の結合定数のような役割を持っていることがわかる。

4. 確率過程量子化の適用

まず、行列 $(A_t)_{ij}$ に対するランジュバン方程式は

$$\begin{aligned} (\Delta A_t)_{ij} &= -\frac{\partial S_{\text{eff}}}{\partial (A_t)_{ji}} \Delta\tau + (\Delta \xi_t)_{ij} \\ &= (\Delta \xi_t)_{ij} + \Delta\tau (A_t)_{ij} \\ &\quad - \Delta\tau \sum_{\pm} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} N^{-\frac{k+l}{2}} G(k, l; \pm 1) k (A_t^{k-1})_{ij} \text{tr} (A_{t\pm 1}^l) \end{aligned} \quad (13)$$

である。 \pm については両方の和をとり、 $G(k, l; -1) = G(l, k; 1)$ である。ここで、 $\Delta \xi_t$ はノイズ項で、ノイズの相関は

$$\begin{aligned} \langle (\Delta \xi_t)_{ij} (\Delta \xi_t)_{kl} \rangle_{\xi} &= 2\Delta\tau \delta_{il} \delta_{jk} \\ \langle (\Delta \xi_t)_{ij} \rangle_{\xi} &= 0 \end{aligned} \quad (14)$$

を満たす。また、 $\Delta\tau$ は1ステップの確率過程の時間変化分で、これは行列やループ変数に付いている添え字の t とはとりあえずは別のものと考えておく。この時間発展はループ変数のランジュバン方程式：

$$\begin{aligned} \Delta \phi_t(n) &= \frac{1}{N} \text{tr} \left(\frac{A_t + \Delta A_t}{\sqrt{N}} \right)^n - \frac{1}{N} \text{tr} \left(\frac{A_t}{\sqrt{N}} \right)^n \\ &= N^{-1-\frac{n}{2}} \left[n \text{tr} (\Delta A_t A_t^{n-1}) + \frac{n-2}{2} \sum_{k=0}^{n-2} (\Delta A_t A_t^k \Delta A_t A_t^{n-k-2}) \right] \\ &\quad + O(\Delta\tau^{\frac{3}{2}}) \end{aligned} \quad (15)$$

を導く。 $\Delta\tau$ の1次までをループ変数を用いて表すと、 $\Delta\phi_t(n) = \Delta\tau[\phi_t(n)$

$$- \sum_{\pm} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} k \phi_t(n+k-2) G(k, l; \pm 1) \phi_{t\pm 1}(l) + \sum_{k=0}^{n-2} \phi_t(n-k-2) \phi_t(k) + \Delta\zeta_t(n) \quad (16)$$

となる。また、新たに出てきたノイズ項は

$$\Delta\zeta_t(n) \equiv N^{-1-\frac{n}{2}} n \text{tr}(\Delta\xi_t A_t^{n-1}) \quad (17)$$

で、相関関数

$$\langle \Delta\zeta_t(n) \Delta\zeta_t(m) \rangle_{\xi} = \Delta\tau \frac{2}{N^2} \langle \phi_t(n+m-2) \rangle_{\xi} \quad (18)$$

を満たす。

式(16)右辺の[] 内の第3項は、1つのループ変数が2つに分裂することを示し、第2項は現実の時空における1ステップの時間だけずれたループ変数との相関が効くことを示すのだが、この意味は直観的には単純ではない。これについては次の節で考察を進める。また、(16)の最後の項のループのノイズ変数は、式(18)を通して、2個のループ変数の結合を示唆している。これらはループ変数を閉じた弦と関連づけたとき、弦の場の量子効果による相互作用を表している。確率過程の時間発展の生成子としてのハミルトン演算子をFokker-Planckハミルトニアン(F-Pハミルトニアン)という。以下ではF-Pハミルトニアンを導出し、CDT模型の、弦の場の理論としての性質を調べる。

5. 弦の場の理論

確率過程量子化法では、F-Pハミルトニアンによって弦の場の理論が定義される。まず、ある観測量 $O(\phi)$ があって、これがループ変数の関数であるとするれば、F-Pハミルトニアン \hat{H}_{FP} はつぎの式で定義される。

$$\langle \phi(\tau=0) | e^{-\tau \hat{H}_{FP}} O(\hat{\phi}) | 0 \rangle \equiv \langle O(\phi_{\xi}(\tau)) \rangle_{\xi} \quad (19)$$

右辺の $\phi_{\xi}(\tau)$ はループ変数のランジュバン方程式の解を表す。ただし、初期条件は $\phi(\tau=0) (\neq 0)$ である。これまで明らかには示してこなかったが、 τ は確率過程の時間でその時間発展の1ステップの刻みが $\Delta\tau$ である。以下では表記の煩雑さを避けるために、ループ変数のもつ τ は表さないこととし、表記を前節までのものにもどして話を進める。式(19)の右辺の時間発展を考えると

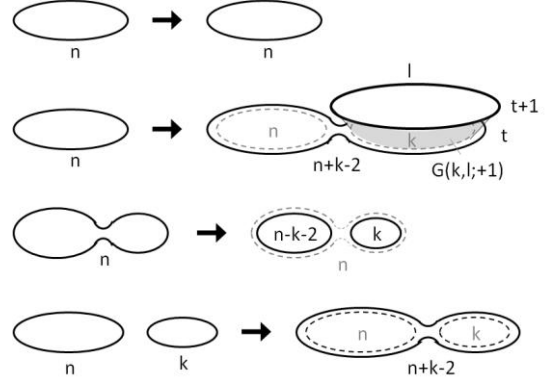


図5 F-Pハミルトニアンの各項に対応するループ変数の変形
第1項から第4項の相互作用の例を示す。

$$\begin{aligned} \langle \Delta O(\phi) \rangle_{\xi} &= \left\langle \sum_m \Delta\phi_t(m) \frac{\partial}{\partial\phi_t(m)} O(\phi) \right. \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{m,n} \Delta\phi_t(m) \Delta\phi_t(n) \frac{\partial^2}{\partial\phi_t(m) \partial\phi_t(n)} O(\phi) \rangle_{\xi} \\ &+ O\left(\Delta\tau^{\frac{3}{2}}\right) \\ &\equiv -\Delta\tau \langle H_{FP} O(\phi) \rangle_{\xi} \quad (20) \end{aligned}$$

これに、ループ変数のランジュバン方程式(16)とノイズの相関関数(18)を用いることでF-Pハミルトニアンが得られる。また、 $\pi_t(n) \equiv \frac{\partial}{\partial\phi_t(n)}$ とすれば、交換関係

$$[\pi_t(n), \phi_t'(m)] = \delta_{t,t'} \delta_{n,m} \quad (21)$$

は明らかであるから、 $\pi_t(n)$ は時刻 t における長さ n の弦の消滅演算子、 $\phi_t(n)$ は時刻 t における長さ n の弦の生成演算子にそれぞれ対応する。これらを用いると

$$\begin{aligned} H_{FP} &= - \sum_t \sum_n n \times [\phi_t(n) \pi_t(n) \\ &- \sum_{\pm} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} k G(k, l; \pm 1) \phi_t(n+k-2) \phi_{t\pm 1}(l) \pi_t(n) \\ &+ \sum_{k=0}^{n-2} \phi_t(n-k-2) \phi_t(k) \pi_t(n) \\ &+ \frac{1}{N^2} \sum_{k=0}^{\infty} \phi_t(n+k-2) \pi_t(k) \pi_t(n)] \quad (22) \end{aligned}$$

で、すべての時刻 t において起こりうる、すべての長さ n の弦に関する相互作用の記述となっている。(図5) 第3

行、第4行は相互作用の前後において長さの総和を2だけ減らしている（これは行列 A_t が2個減ることからくる）が、離散ループから連続極限をとるときに離散的な2個分の長さは0となるため、弦の長さは保存することと考えてよい。ゆえに、それぞれ閉じた弦の長さを保存する分裂と結合を意味しており、非臨界次元における弦の場の理論の行列模型にはいつも含まれている[2,6]。つぎにCDT特有の項について、第1行は何も変えないが、第2行は、ある時刻 t において長さ n の弦が消滅し、任意の長さ $k-2$ だけ伸びた（長さ $n+k-2$ の）弦が生成されると同時に、となりの時刻 $t \pm 1$ には別の任意の長さ l の弦が生成されるという、長さの保存しない相互作用である。

このF-Pハミルトニアンを

$$H_{FP} = -\frac{1}{N^2} \sum_t \sum_n n L_t(n-2) \pi_t(n) \quad (23)$$

の形で表すと

$$L_t(n) = N^2 [\phi_t(n+2)$$

$$- \sum_{\pm} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} k G(k, l; \pm 1) \phi_t(n+k) \phi_{t \pm 1}(l)$$

$$+ \sum_{k=0}^n \phi_t(n-k) \phi_t(k) + \frac{1}{N^2} \sum_{k=0}^{\infty} \phi_t(n+k) \pi_t(k)] \quad (24)$$

である。この生成子どうしの交換関係は

$$[L_t(n), L_t(m)] = (n-m) \delta_{t,t'} L_t(n+m) \quad (25)$$

を満たし、完全に閉じていることが確かめられる。これは弦理論がその基本としている共形場の理論において重要な役割を果たすピラソロ代数であり、この模型が弦の場の理論の記述でありうることの一つの根拠になる。

最後に、確率過程の時間変化のもとで、観測可能量の期待値がもつ不変性からSchwinger-Dyson方程式(S-D方程式)を導こう。観測可能量 O の期待値は、

$$\langle O \rangle = \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}M O e^{S[M]} \quad (26)$$

である。式(4)に示したディスク振幅 $W(n)$ はループ変数 $\phi_t(n)$ の真空につながる相関関数の期待値であるから、 t によらず

$$W(n) = \langle \phi_t(n) \rangle \quad (27)$$

である。いま、 $\langle \Delta \phi_t(n) \rangle = 0$ から得られるS-D方程式を調べる。式(16)の期待値で、とくに右辺第2項に注意する。ここで、 $G(k, l; t \pm 1)$ のかわりに、

$$G^{(1)}(k, l; t \pm 1) \equiv k G(k, l; t \pm 1) \quad (28)$$

を新たに定義する。これは k 個のリンクに識別可能性を付した場合の2ループ振幅である。ディスク振幅と(2)式

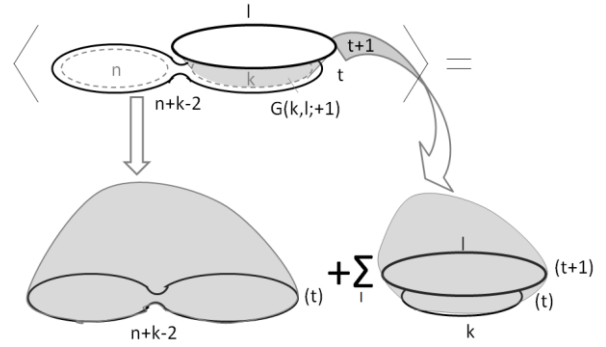


図6 ディスク振幅の期待値

時刻 t で長さ k のループは時刻 $t+1$ の全状態を経由して最終的に真空状態になる。

を変形した「識別可能な2ループ振幅」の連結として

$$\sum_{l=0}^{\infty} G^{(1)}(k, l; t \pm 1) \langle \phi_{t \pm 1}(l) \rangle = \langle \phi_t(k) \rangle \quad (29)$$

を用いる。これは、式(16)でとなりの時刻 $t \pm 1$ に影響が及んでいた相互作用でも、期待値レベルでは、同一時間 t についてだけの相互作用とみなせることを意味しているようである。(図6) S-D方程式のもっとも次数の低いものはディスク振幅だけの関係式で、次のように簡単化された形で表すことができる。

$$W(n) - 2 \sum_{k=0}^{\infty} W(n+k-2) W(k)$$

$$+ \sum_{k=0}^{n-2} W(k) W(n-k-2) = 0 \quad (30)$$

第2項では、弦が長さを伸ばすとともにその伸び(長さ k)に等しい分に相当するもう一つの弦が、対生成のような形で生成されるという現象に相当するが、このような相互作用は、非臨界次元の弦の場の理論でも現れる現象であり、S-D方程式もよく似た形である[6]。

6. まとめ

CDTの動的三角形分割による2次元面上の弦の場の理論を導く行列模型を作った。CDTの特徴は統計的に扱いやすく、これが数値計算に生かせることである。例えば、1ステップの実時間の発展のもとでの2ループ振幅は最も簡単な統計力学の分配を考えるものであった。一貫してループ空間で扱い、行列に確率過程量子化法を用いることで、相互作用の様子など現象が直観的に理解しやすい形式の模型を構築できた。行列に時間の添え字を

付けて無限の分類はしたが、基本的に A , B と表された、それぞれ空間的行列と時間的行列の、2種類の複素行列からなるいわゆる2-行列模型で構成されている。さらに、F-P ハミルトニアンを調べ、この模型が連続極限をとる以前の離散的模型の段階でビラソロ代数をもつことを確認した。今回の報告は離散的模型の性質に限っておいたが、これは連続極限においても満たされるものと期待できる。

一つの興味深い発見は、対生成の項が出現するメカニズムがこれまでの非臨界次元の弦の行列模型とまったく異なる点である。時間が隣り合う2つの弦の相互作用というのは直観的には理解しにくいものであるが、ディスク振幅と2ループ振幅の連結を用いると、統計力学的には同時刻の相互作用として解釈できるとともに、S-D 方程式レベルでは項が単純化された点は強調してよいであろう。また、これによって、最終的に期待値レベルでは行列やループ変数の添え字 t は本質的な役割をもたないことになる。この対生成的な長さを保存しない相互作用は今回の模型の、従来の模型に対して特徴が際立つ点である。この項は弦の長さの時間的なゆらぎを、比較的大きくするための効果になる。この模型では、1ステップの時間経過においては長さがいくらかでも変わるようなループに移ることも三角形の配位としては可能であることから、ゆらぎは当然の帰結とも考えられる。しかしながら一方では、2ループ振幅の明らかな形から、極端に長さを変えるものは抑えられる機能が含まれる。これらの効果の強弱により、有効理論における対生成的な効果によると考えられるゆらぎを生じ得ることや、さらに4次元では弦の長さの期待値やゆらぎ方に相構造が存在すること[7]は、直観的には納得できる。

今回は現象に関わる限られた問題だけを扱ったため、報告に至らなかった課題をいくつか挙げておこう。特に、われわれが構築した行列模型の、従来の三角形分割模型に対して異なる性質と、これまでに知られているCDTの性質との整合という観点が基本である。第一に、連続極限の可能性で弦の分裂・結合が残る弦の場の理論が構成できるかということで、どんな行列模型においても、離散的模型と現実をつなぐ重要な点である。第二に、今回のようなループ空間で調べた物理量を、ラプラス変換で移る双対空間で表すことである。ループ空間ではループに関する面積や長さがその特性であったのに対し、双対空間では面上の宇宙定数やループ上の境界宇宙定数が基本定数となる。とくに、ディスク振幅やより多くの境界をもつループ振幅の期待値の満たすループ方程式は、双対空間の表現では、代数方程式としてより解析しやす

い形にできるため、これまでは双対空間において調べられてきた[8,9]。双対空間表現で高次のループ振幅をも含むループ方程式が、われわれの行列模型のループ空間表現のS-D方程式と単純には比較できない形であり、整合性の確認には工夫を要する。第三に、開いた弦をこの模型に組み込むことである。物質を表す開いた弦を含んだループの代数構造やS-D方程式を調べることである。これらについては別の機会に報告したい。

最後に、この行列模型の問題点についてである。はじめの行列模型の作用からループ変数に関わる空間的行列 A だけを残すような有効作用を得たとき、1ステップの時間経過で起こりうるすべてのループ遷移に対応する三角形の配位を、重みまで正しく出してくれるのだが、ただ一点の例外があった。それは長さ0の状態からあらゆる長さの弦が生成される可能性が余分に含まれてしまうことである。この過程は非常に低い可能性のものであるが、ただ、0ではない場合の影響は、数値解析的に調べてみる価値がある。もともとのCDTにおいては含まれない過程である[9]が、有効理論の中で禁止しようとするれば、基礎的な模型からの自然な導出は困難で、手に入れる形になる。この部分が、たとえばディスク振幅やループ振幅に対してどれほどの効果になるのかを評価することは重要なことである。

参考文献

- [1] たとえば、Y.Makeenko, "Methods of Contemporary Gauge Theory", Cambridge (2002) 13章
- [2] N.Ishibashi, H.Kawai, Phys. Lett. B 314 (1993) 190
- [3] A.Jevicki, J.Rodrigues, Nucl. Phys. B 421 (1994) 728
- [4] J.Ambjorn, R.Loll, Nucl. Phys. B 536 (1998) 407
- [5] N.Nakazawa, Mod. Phys. Lett. A 10 No.25 (1995) 2175
- [6] I.Kostov, Phys. Lett. B 344 (1995) 135; Phys. Lett. B 349 (1995) 284
- [7] J.Ambjorn, J.Jurkiewicz, R.Loll, Phys. Rev. D 72 (2005) 064014
- [8] D.Benedetti, J.Henson, Phys. Lett. B 678 (2009) 222
- [9] J.Ambjorn, R.Loll, Y.Watabiki, W.Westra, S.Zohren, Phys. Lett. B 665 (2008) 252; JHEP 0805 (2008) 032