素数を法としたフィボナッチ型数列の周期

The periods of Fibonacci-type sequences modulo primes

小笹 航平 **, 山根 映介 **,
Kohei KOZASA, Eisuke YAMANE,

古清水 大直 ***, 倉田 久靖 ***
Hironao KOSHIMIZU, Hisayasu KURATA

概 要

フィボナッチ型数列 $f_{n+2} = af_{n+1} + bf_n$ (初期値 f_0, f_1, 自然数 a, b) を素数 p で割った余りの世界 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ で考える. このとき, 素数 p, 初期値 f_0, f_1, 自然数 a, b をそれぞれ動かし, そのときに出てくる周期の規則性をいくつかの視点で考察した.

本論文は, 2013 年 10 月 1 日より結成された米子高専数学同好会による研究報告である.

1. はじめに

以下で表される数列 $\{f_n\}$ を**フィボナッチ数列**という:

$$\begin{cases} f_0 = 0, \quad f_1 = 1 \\ f_{n+2} = f_{n+1} + f_n \quad (n \geqq 0) \end{cases}$$

具体的に記述すると, 次の数列である.

$$\{f_n\} : 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \cdots$$

簡単に説明すると, 初期値を $0, 1$ とし, 各項は前の 2 項の和になっている数列である.

フィボナッチ数列は, 自然界の様々なところに姿を現しており, とても重要な数列である. 例えば, ヒマワリの種の配列や松ぼっくりの形に螺旋として表れている. また, 前後の項の比の列は収束し, その極限値は黄金比と呼ばれる美しい値になることも知られている.

さて, この数列 $\{f_n\}$ は明らかに単調に増加しており, 周期的なものをみることができない. しかし, この数列をある整数で割った余りの世界で眺めるとどうだろうか. 例えば, 3 で割った余りの世界でこの数列を考えてみると,

$$0, 1, 1, 2, 0, 2, 2, 1, 0, 1, 1, 2, 0, 2, 2, 1, 0, 1, \cdots$$

となる. このように, $0, 1, 1, 2, 0, 2, 2, 1$ が繰り返し続いていて, この数列は周期をもっているといえる. ここでは, フィボナッチ数列を拡張したフィボナッチ型数列を考え, この数列を素数で割った余りの世界で考える. このとき, 初期値や係数を変えると周期が変化するがその規則性について議論する.

まず, 2 節ではフィボナッチ数列の周期について述べる. そして, 3 節ではフィボナッチ型数列の周期とその規則性などの証明をする.

2. フィボナッチ数列における周期

m を自然数とする. 整数 a, b が m を法として合同であるとは, a を m で割った余りと b を m で割った余りが等しいときにいう. このとき, $a \equiv b \pmod{m}$ または, 簡単に $a = b$ と表す. このとき, $\equiv$ は同値関係であり, この関係 $\equiv$ による商集合 $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ を m で割った余りの世界と呼ぶことにする.

フィボナッチ数列を自然数 m で割った余りの世界 $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ で見ると, 周期性をもつことが知られている. ここでは素数 p で割った余りの世界で考える. フィボナッチ数列を素数 p で割った余りの世界, すなわち, 体 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ の中で考える. $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ の元は $\{0, 1, 2, 3, \cdots, p-1\}$ の p 個であり, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ の中で四則演算が行えることに注意する. 以下, p は素数を表し, 数列は $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ の中で考えるものとする. また, **周期**という言葉は, 数列が繰り返す最小の長さをいうことにする.

さて, フィボナッチ数列の漸化式 $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ は変えずに初期値 f_0, f_1 を変えてみるとどうなるだろう

---

* 原稿受理 平成 25 年 12 月 6 日
** 機械工学科 3 年生
*** 教養教育科

か．ただし，初期値 $f_0=0, f_1=0$ の場合は 0 が続く数列になるので省くことにする．いくつか例を挙げてみよう．

例 1. 素数 $p=3$; 初期値 $f_0=1,\ f_1=0$ の場合:

$$1,0,1,1,2,0,2,2,1,0,1,1,2,0,2,2,1,0,\cdots$$

$1,0,1,1,2,0,2,2$ が繰り返し現れるので，周期 8 である．

例 2. 素数 $p=3$; 初期値 $f_0=1,\ f_1=1$ の場合:

$$1,1,2,0,2,2,1,0,1,1,2,0,2,2,1,0,1,1,\cdots$$

$1,1,2,0,2,2,1,0$ が繰り返し現れるので，周期 8 である．

例 3. 素数 $p=11$; 初期値 $f_0=0,\ f_1=1$ の場合:

$$0,1,1,2,3,5,8,2,10,1,0,1,1,2,3,5,8,2,10,1,0,1,\cdots$$

$0,1,1,2,3,5,8,2,10,1$ が繰り返し現れるので，周期 10 である．

例 4. 素数 $p=11$; 初期値 $f_0=1,\ f_1=4$ の場合:

$$1,4,5,9,3,1,4,5,9,3,1,4,\cdots$$

$1,4,5,9,3$ が繰り返し現れるので，周期 5 である．

例 3 と例 4 から分かるように，同じ素数でも初期値によって周期が変わることがある．$p=2,3,5,7,11,13,17,19$ に対して，初期値を全て動かして出てくる周期を調べると，次の表のようになることがわかった．

p	2	3	5	7	11	13	17	19
周期	3	8	4, 20	16	5, 10	28	36	9, 18

ここで，次の問題があげられる．

1. 素数 p に対して，周期はどのように書くことができるのか．

2. 素数 p に対して，初期値を全て動かしたときに周期は何個出てくるのか．

1 の問題について，完全な解答は未だ得られていないようだが，次の結果が知られていることがわかった．

定理 A ([1]). (i) $p \equiv \pm 2 \pmod 5$ のとき，周期は $2(p+1)$ の約数である．
(ii) $p \equiv \pm 1 \pmod 5$ のとき，周期は $p-1$ の約数である．

$p=3,7,10,13,17$ は，$p \equiv \pm 2 \pmod 5$ を満たすので，定理 A の (i) より，周期は $2(p+1)$ の約数である．実際，表を見ると周期は "ちょうど" $2(p+1)$ になっている．しかし，$p=47,107,113$ においては，ある初期値をとれば，周期が $\frac{2(p+1)}{3}$ となることがわかった．

また，$p=11,19$ は，$p \equiv \pm 1 \pmod 5$ を満たすので，定理 A の (ii) より，周期は $p-1$ の約数である．実際，表を見ると周期は $p-1$ とその約数が出てきている．この結果から "周期 $p-1$ は必ず存在するのか" という疑問がある．しかしながら，$p=89,189$ の場合を考えると $p-1$ の周期は出てこないことがわかった．ちなみに，一番大きい周期はそれぞれ $44(=\frac{p-1}{2}), 46(=\frac{p-1}{3})$ である．

次に，**2** の問題について考えてみると，素数 p に対して，初期値をいろいろと変えてみても，高々2 個の周期しか出てこないことがわかった．この証明が見当たらないので証明をつけることにするが，次の節の命題 1 の $a=1$, $b=1$ の場合であるので，そこでまとめて述べることにする．

2. フィボナッチ型数列における周期の規則性の発見

フィボナッチ数列の周期性についてはよく調べられている ([2, 3])．しかし，この問題はフィボナッチ数列に限定する必要はない．そこで，フィボナッチ数列の一般化を試みることにする．以下で表される数列 $\{f_n\}$ を**フィボナッチ型数列**という:

$$f_{n+2} = af_{n+1} + bf_n \quad (n \geqq 0)$$

ただし，初期値を f_0, f_1 とし，a, b は自然数の定数とする．

前節と同様に，p を素数としたとき，体 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 上のフィボナッチ型数列には周期が存在する．この周期 N は，5 つの変数 (素数 p と初期値 f_0, f_1，自然数 a, b) によって定まるので

$$N = N(p; f_0, f_1; a, b)$$

と書くことがある．例えば，次のようになる．

例 5. 素数 $p=11$; 初期値 $f_0=0, f_1=1$; 自然数 $a=3, b=1$ の場合:

$$0,1,3,10,0,10,8,1,0,1,3,10,0,10,8,1,0,1,\cdots$$

$0,1,3,10,0,10,8,1$ が繰り返し現れるので，周期 $N(11;0,1;3,1)=8$ である．

初期値 $f_0=0,\ f_1=0$ のときは，この数列は 0 が続く場合になるから面白くないので，ここでは省くことにする．また，係数 a, b に対しても $1 \leqq a \leqq p-1, 1 \leqq b \leqq p-1$ のところだけを考える．

我々は, $p = 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19$ のとき, 自然数 a, b を固定し, 初期値を動かすことによって出てくる周期を並べ表にすることにした. ここでは, $p = 5$ と $p = 7$ の場合だけを載せることにする.

$p = 5$ の場合:

$a\backslash b$	1	2	3	4
1	$4, 20$	$2, 4$	24	6
2	12	24	$2, 4$	$1, 5$
3	12	24	$1, 4$	$2, 10$
4	$4, 20$	$1, 4$	24	3

$p = 7$ の場合:

$a\backslash b$	1	2	3	4	5	6
1	16	$2, 3, 6$	24	48	$3, 21$	6
2	$3, 6$	48	$2, 6$	48	24	$1, 7$
3	16	48	$6, 42$	$2, 3, 6$	$1, 3$	8
4	16	48	$3, 21$	$1, 6$	$2, 6$	8
5	$3, 6$	48	$1, 3$	48	24	$2, 14$
6	16	$1, 6$	24	48	$6, 42$	3

このように表にして調べてみたところ, 一般に次のことが成り立つのではないかと予想した.

1. 素数 p と自然数 a, b に対して, 初期値を全て動かしても高々3 個の周期しか出てこない.

2. 素数 p と自然数 a, b に対して, 初期値が $0, 1$ のとき, 周期が最大になる.

3. 各表において, 上下対称な位置にある各々の最大の周期をみると, 「一致するか」または「一方が他方の 2 倍になっている」のどちらかである.

これら 3 つの予想を含む命題が証明できたので, 以下にそれを記す.

証明にはフィボナッチ型数列を行列で表現し, その固有値などを利用する. ここでその準備をしておく. 初期値 f_0, f_1 と自然数 a, b をとる. 各 $n \geqq 0$ に対して, $F_n = \begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_n \end{pmatrix}$ とおく. とくに, $F_0 = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_0 \end{pmatrix}$ を初期値と呼ぶ. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とおけば,

$$F_{n+1} = \begin{pmatrix} f_{n+2} \\ f_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} af_{n+1} + bf_n \\ f_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_n \end{pmatrix} = AF_n$$

となる. ゆえに, 任意の初期値 F_0 と任意の n に対して,

$$F_n = A^n F_0$$

が成り立つ.

素数 p, 自然数 a, b に対して, N が周期であることは, 次のことと同値である:

ある初期値 F_0 が存在して,

$$\begin{cases} (1) \quad A^N F_0 = F_0 \\ (2) \quad \text{任意の } n < N \text{ に対して, } A^n F_0 \neq F_0 \end{cases}$$

が成り立つ.

これより, N が周期ならば, 1 が A^N の固有値であることがわかる.

また, A の固有値は,

$$\lambda_1 = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4b}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{a - \sqrt{a^2 + 4b}}{2}$$

である. これより, 任意の n に対して, λ_1^n, λ_2^n は A^n の固有値になる.

まず, 表の各マスに出てくる周期の個数が高々3 個であることを示そう.

命題 1. 素数 p と $1 \leqq a \leqq p-1, 1 \leqq b \leqq p-1$ となる自然数 a, b に対して, 集合

$$\left\{ N(p; f_0, f_1; a, b) \mid f_0, f_1 \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, (f_0, f_1) \neq (0, 0) \right\}$$

は高々3 個の元からなる.

また, 次の (A), (B) が成り立つことがわかった.

(A) $a^2 + 4b \equiv 0 \pmod{p}$ のとき, この集合はちょうど 2 個である.

(B) $a = 1$, $b = 1$ のとき (すなわち, フィボナッチ数列のとき), この集合は高々2 個の元からなる.

証明. 素数 p と自然数 a, b $(1 \leqq a \leqq p-1, 1 \leqq b \leqq p-1)$ をとり固定する. また, A の固有値を λ_1, λ_2 とする.

(I) $\lambda_1 \neq \lambda_2$ のとき: n_1, n_2 をそれぞれ $\lambda_1^{n_1} = 1$, $\lambda_2^{n_2} = 1$ となる最小の自然数とする. また, n_3 を n_1 と n_2 の最小公倍数とする. 今, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ だから, ある正則行列 P を用いて,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

と対角化できる. このとき,

$$A^{n_3} = P \begin{pmatrix} \lambda_1^{n_3} & 0 \\ 0 & \lambda_2^{n_3} \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} = E$$

となるので, 任意の初期値 F_0 に対して,

$$A^{n_3}F_0 = F_0$$

が成り立つ．これより, 出てくる周期は n_3 の約数である．

ここで, $N < n_3$ となる周期 N が見つかったとすると,

ある初期値 F_0' が存在して,

$$\begin{cases} (1) \quad A^N F_0' = F_0' \\ (2) \quad \text{任意の } n < N \text{ に対して}, A^n F_0' \neq F_0' \end{cases}$$

が成り立つ．

(1) から, 1 が A^N の固有値であることがわかる．よって, $\lambda_1^N = 1$ または $\lambda_2^N = 1$ が成り立つ．

(i) $\lambda_1^N = 1$ のとき: n_1 の最小性より, $N = kn_1$ となる整数 $k > 0$ が存在する．ここで, λ_1, λ_2 に属する固有ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ とすると, ある数 α, β で $F_0' = \alpha\boldsymbol{x}_1 + \beta\boldsymbol{x}_2$ とかける．すると,

$$F_0' = A^N F_0' = A^N(\alpha\boldsymbol{x}_1 + \beta\boldsymbol{x}_2) = \alpha\lambda_1^N\boldsymbol{x}_1 + \beta\lambda_2^N\boldsymbol{x}_2$$

で, $\alpha\boldsymbol{x}_1 + \beta\boldsymbol{x}_2 = \alpha\boldsymbol{x}_1 + \beta\lambda_2^N\boldsymbol{x}_2$ となる．$\boldsymbol{x}_1$ と $\boldsymbol{x}_2$ は 1 次独立より,

$$\lambda_2^N = 1 \quad \text{または} \quad \beta = 0$$

となる．$\lambda_2^N = 1$ のとき, n_2 の最小性より, $N = \ell n_2$ となる整数 $\ell > 0$ が存在する．$N = kn_1 = \ell n_2$ であり, n_3 は n_1 と n_2 の最小公倍数だから, $n_3 \leqq N$ となり矛盾する．よって, $\beta = 0$ である．このとき, F_0' は λ_1 に属する固有ベクトルであることがわかり, $A^{n_1}F_0' = \lambda_1^{n_1}F_0' = F_0'$ となる．(2) より $n_1 \geqq N$ となり, よって, $N = n_1$ である．

(ii) $\lambda_2^N = 1$ のとき: (i) と同様にして $N = n_2$ であることが導ける．

以上より, 出てくる周期は多くても n_1, n_2, n_3 の 3 個である．

(Ⅱ) $\lambda_1 = \lambda_2$ のとき: もし対角化できたとすると, ある正則行列 P に対して,

$$A = P\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}P^{-1}$$

となる．すると

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A = P\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}P^{-1} = \lambda_1 E$$

となり, これは矛盾する．よって, A は対角化できない．そこで, ジョルダン標準形を考えると, ある正則行列 P で

$$A = P\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}P^{-1}$$

とできる．

さて, n_1 を $\lambda_1^{n_1} = 1$ となる最小の自然数としよう．今, N を周期とすると, $\lambda_1^N = 1$ となるので, n_1 の最小性より N は n_1 の倍数である．

一方,

$$\begin{aligned} A^{n_1p} &= P\begin{pmatrix} \lambda_1^{n_1p} & n_1p\lambda_1^{n_1p-1} \\ 0 & \lambda_1^{n_1p} \end{pmatrix}P^{-1} \\ &= P\begin{pmatrix} (\lambda_1^{n_1})^p & p(n_1\lambda_1^{n_1p-1}) \\ 0 & (\lambda_1^{n_1})^p \end{pmatrix}P^{-1} \\ &= P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1} = E \end{aligned}$$

であるから, N は n_1p の約数になる．p は素数だから, $N = n_1$ または $N = n_1p$ となり, 出てくる周期は多くても n_1 と n_1p の 2 個である．

(A) 出てくる周期は n_1 と n_1p のちょうど 2 個であることを示そう．λ_1 に属する A の固有ベクトルを考えると,

$$\alpha\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\alpha \neq 0)$$

であるから, このような初期値の場合は周期は n_1 になる．次に, もし, 初期値 $F_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ が周期 n_1 だと仮定すると, $A^{n_1}F_0 = F_0$ である．A は正則だから, $(A^{-1})^{n_1-1}$ を左からかけると,

$$\begin{aligned} AF_0 &= (A^{-1})^{n_1-1}A^{n_1}F_0 = (A^{-1})^{n_1-1}F_0 \\ &= \frac{1}{\lambda_1^{n_1-1}}F_0 = \lambda_1 F_0 \end{aligned}$$

である．よって, F_0 が λ_1 の固有ベクトルになるから, ある数 α で

$$F_0 = \alpha\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となるが, これは矛盾する．ゆえに, 初期値 F_0 のときの周期は n_1 ではないので, n_1p になる．こうして, $a^2+4b \equiv 0 \pmod{p}$ のときは, $\lambda_1 = \lambda_2$ になるので, この場合の周期の個数は n_1 と n_1p の 2 個であることがわかった．

(I), (Ⅱ) より, 高々3 個の周期しか出てこないことがわかる．

(B) 次に $a = 1, b = 1$ のとき, すなわち, フィボナッチ数列の場合を考える．このとき, 初期値を全て動かしても, 周期は高々2 個しか出てこないことを示す．

$p=2$ のとき, 初期値

$$(f_0,f_1)=(0,1),(1,0),(1,1)$$

の 3 つである. どの初期値の場合でも周期 3 になり, 1 つの周期しか出てこない. 以下, $p\neq 2$ として考える.

$A=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$ の固有値を λ とすると, $\lambda^2-\lambda-1=0$ となる. 2 つの固有値を λ_1,λ_2 としよう. 固有方程式の判別式は 5 になるから, $p=5$ であることと, $\lambda_1=\lambda_2$ は同値であり, (II) で示したように, 周期は高々2 個である.

ここからは, $\lambda_1\neq\lambda_2$ とする. n_1, n_2 をそれぞれ $\lambda_1^{n_1}=1$, $\lambda_2^{n_2}=1$ となる最小の自然数とする. ここで, $n_1\leqq n_2$ としても一般性を失わない.

(i) n_1 が偶数のとき:

$$\lambda_2^{n_1}=\lambda_1^{n_1}\lambda_2^{n_1}=(\lambda_1\lambda_2)^{n_1}=(-1)^{n_1}=1$$

となり, n_2 の最小性より, $n_1=n_2$ である. A を対角化すると, ある正則行列 P を用いて,

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\end{pmatrix}$$

となる. よって,

$$A^{n_1}=P\begin{pmatrix}\lambda_1^{n_1}&0\\0&\lambda_2^{n_1}\end{pmatrix}P^{-1}=P\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}P^{-1}=E$$

ゆえに, 任意の初期値 F_0 に対して, $A^{n_1}F_0=F_0$ となる. もしある $N<n_1$ に対して, $A^NF_0=F_0$ となったとすると, 1 は A^N の固有値である. よって, $\lambda_1^N=1$ または $\lambda_2^N=1$ となるが, n_1,n_2 の最小性より矛盾する.

したがって, 周期は n_1 の 1 個のみである.

(ii) n_1 が奇数のとき:

$$\lambda_2^{n_1}=\lambda_1^{n_1}\lambda_2^{n_1}=(\lambda_1\lambda_2)^{n_1}=(-1)^{n_1}=-1$$

となり, $\lambda_2^{2n_1}=1$ である. ゆえに, n_2 の最小性から, ある整数 $k>0$ で $kn_2=2n_1$ と表せる. このとき,

$$kn_2=2n_1\leqq 2n_2$$

であり, $\lambda_2^{n_1}=-1\neq 1$ だから, $k\neq 2$ となる. ゆえに, $n_2=2n_1$ である. n_1 と n_2 の最小公倍数が n_2 となるので, (I) より周期は n_1 と n_2 の高々2 個である. □

次に, 表の各マスにおいて, 初期値 $f_0=0,f_1=1$ のとき, 最大の周期が出てくることを示そう.

命題 2. 素数 p, 自然数 a,b を固定する. このとき, 初期値 $f_0=0,f_1=1$ のとき, 最大の周期になる. すなわち, 任意の初期値 f_0,f_1 に対して,

$$N(p;f_0,f_1;a,b)\leqq N(p;0,1;a,b)$$

が成り立つ.

証明. 数列 $\{g_n\},\{h_n\}$ を次のように定める:

$$\begin{cases}g_0=0,\quad g_1=1\\ g_{n+2}=ag_{n+1}+bg_n\quad(n\geqq 0)\end{cases},$$

$$\begin{cases}h_0=1,\quad h_1=0\\ h_{n+2}=ah_{n+1}+bh_n\quad(n\geqq 0)\end{cases}$$

今, 数列 $\{g_n\}$ の周期を N とすると $N=N(p;0,1;a,b)$ である. これが, 初期値を全て動かしたときの最大の周期であることを示そう. まず, $\{h_n\}$ の周期が N であることを示そう.

$$\begin{aligned}\{g_n\}&:\overbrace{0,1,a,a^2+b,\cdots}^{N},0,1,\cdots\\ \{h_n\}&:1,\underbrace{0,b,ab,a^2b+b^2,\cdots,1}_{N},0,b,\cdots\end{aligned}$$

数列の作り方より, $h_{n+1}=bg_n$ $(n\geqq 0)$ であることがわかる. このとき, $0,b,ab,\cdots$ で始まり, 次に $0,b$ が現れる前の項までが N 個あることになる. つまり, $\{h_n\}$ の最初の項から始めても, 周期 N であることに変わりはない. よって, $\{h_n\}$ の周期は N である.

次に, 数列 $\{f_n\}$ は $\{g_n\},\{h_n\}$ を使って $f_n=f_1g_n+f_0h_n$ とかける. また, $\{g_n\}$ と $\{h_n\}$ の周期はともに N だから,

$$\begin{pmatrix}g_{N+1}\\g_N\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}h_{N+1}\\h_N\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

である. よって,

$$\begin{aligned}F_N=\begin{pmatrix}f_{N+1}\\f_N\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}g_{N+1}&h_{N+1}\\g_N&h_N\end{pmatrix}\begin{pmatrix}f_1\\f_0\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}f_1\\f_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f_1\\f_0\end{pmatrix}=F_0\end{aligned}$$

となるので, 初期値 f_0,f_1 のときの周期は, N の約数になることがわかり

$$N(p;f_0,f_1;a,b)\leqq N=N(p;0,1;a,b)$$

が成り立つ. よって, 初期値 $0,1$ のときの周期が最大の周期である. □

最後に, 表を上下半分に折ったときに重なる 2 つのマスの中の最大の周期が, 一致しているか, または, 一方が他方の 2 倍になっている. このことを証明しよう.

命題 3. 素数 p と自然数 a, b を固定する. $N_1 = N(p; 0, 1; a, b)$, $N_2 = N(p; 0, 1; p-a, b)$ とおくとき, $N_1 = N_2$ または $N_1 = 2N_2$ または $2N_1 = N_2$ である.

証明. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -a & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とおき, A の固有値 λ_1, λ_2 と B の固有値 μ_1, μ_2 を次で定める.

$$\lambda_1 = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4b}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{a - \sqrt{a^2 + 4b}}{2},$$

$$\mu_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 + 4b}}{2}, \quad \mu_2 = \frac{-a - \sqrt{a^2 + 4b}}{2}.$$

このとき, $\mu_1 = -\lambda_2$, $\mu_2 = -\lambda_1$ であることに注意する. n_1, n_2, m_1, m_2 をそれぞれ $\lambda_1^{n_1} = 1, \lambda_2^{n_2} = 1, \mu_1^{m_1} = 1, \mu_2^{m_2} = 1$ となる最小の自然数とする.

(I) $a^2 + 4b \not\equiv 0 \pmod p$ のとき: このとき, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ かつ $\mu_1 \neq \mu_2$ となる. 命題 2 より, 初期値 $0, 1$ のときは最大の周期になるから, N_1 は n_1 と n_2 の最小公倍数であり, N_2 は m_1 と m_2 の最小公倍数になる.

まず, $N_1 \leqq N_2$ のときを考える.

(i) N_1 が偶数のとき:

$$\mu_1^{N_1} = (-\lambda_2)^{N_1} = \lambda_2^{N_1} = 1,$$
$$\mu_2^{N_1} = (-\lambda_1)^{N_1} = \lambda_1^{N_1} = 1$$

となる. N_2 は m_1 と m_2 の最小公倍数だから, $N_2 \leqq N_1$ となる. よって, $N_1 = N_2$ となる.

(ii) N_1 が奇数のとき:

$$\mu_1^{2N_1} = (-\lambda_2)^{2N_1} = \lambda_2^{2N_1} = 1,$$
$$\mu_2^{2N_1} = (-\lambda_1)^{2N_1} = \lambda_1^{2N_1} = 1$$

となる. N_2 は m_1 と m_2 の最小公倍数だから, ある整数 $k > 0$ で $2N_1 = kN_2$ とかける. $N_1 \leqq N_2$ より, $k = 1$ または $k = 2$ である. つまり, $N_1 = N_2$ または $2N_1 = N_2$ である.

また, $N_2 \leqq N_1$ のときも同様に, $N_1 = N_2$ または $2N_2 = N_1$ が成り立つ.

(II) $a^2 + 4b \equiv 0 \pmod p$ のとき: このとき, $\lambda_1 = \lambda_2$, $\mu_1 = \mu_2$ となる. 命題 1 の証明より, 初期値 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ のそれぞれの周期は, $N_1 = n_1 p$, $N_2 = m_1 p$ であることがわかる.

まず, $N_1 \leqq N_2$ のときを考えると, $n_1 \leqq m_1$ となり,

$$\mu_1^{2n_1} = (-\lambda_1)^{2n_1} = \lambda_1^{2n_1} = 1$$

だから, m_1 の最小性より, ある整数 $k > 0$ で $2n_1 = km_1$ となる. このとき, $n_1 \leqq m_1$ だから, $k = 1$ または $k = 2$ である. よって, $m_1 = n_1$ または $m_1 = 2n_1$ となる. つまり, $N_1 = N_2$ または $2N_1 = N_2$ である.

$N_1 \geqq N_2$ のときも同様に議論すると, $N_1 = N_2$ または $N_1 = 2N_2$ であることがわかる. □

3. おわりに

フィボナッチ型数列の周期性についての研究に取り組んでいるうちに, 周期をある規則で記述できないかや別の数列の周期性などを調べてみようと思った. ここで, 我々が今後取り組もうとする課題について述べておくことにする.

今後の課題.

1. フィボナッチ型数列の周期性に対して, 規則性を記述できるものはないかを探る.
2. 漸化式 $f_{n+2} = f_{n+1}^a f_n^b$ で与えられる数列の周期性を考える. また, フィボナッチ型数列 $f_{n+2} = af_{n+1} + bf_n$ との関係性を探る.
3. 素数以外の整数で割った余りの世界で考える.

参考文献

[1] C.W. Campbell, *The period of the Fibonacci sequence modulo j*, Math 399, 2007.

[2] S. Gupta, P. Rockstroh and F.E. Su, *Splitting fields and periods of Fibonacci sequences modulo primes*, Math. Mag., **85**(2) (2012), 130-135.

[3] J. Ide and M.S. Renault, *Power Fibonacci sequences*, The Fibonacci Quarterly, **50**(2) (2012), 175–180.