

# 自然数を法としたフィボナッチ型数列の周期

## The period of Fibonacci-type sequences modulo natural numbers

山根映介 \*\*      岩田寛大 \*\*      寺本誠司 \*\*\*  
Eisuke YAMANE      Kanta IWATA      Seiji TERAMOTO  
中村彰吾 \*\*\*\*      倉田久靖 \*\*\*\*\*  
Shogo NAKAMURA      Hisayasu KURATA

### 概要

自然数を法として考えるとき、フィボナッチ数列は周期数列になる。そこで、フィボナッチ数列の一般型としてフィボナッチ型数列を考え、その周期がどのようなようになるかを考察する。そこにはフィボナッチ数列のみでは得られなかった豊かな世界が広がっている。

## 1 はじめに

自然数を法として考えるとき、フィボナッチ数列は周期数列になる。そこで、フィボナッチ数列の一般型としてフィボナッチ型数列を考え、その周期がどのようなようになるかを考察する。そこにはフィボナッチ数列のみでは得られなかった豊かな世界が広がっている。

本論文は、第19回高専シンポジウム (<http://www.cc.kurume-nct.ac.jp/sympo19/>) および第3回高専数学教育シンポジウム (<http://p-mathedu.org/symposium/>) において、米子高専数学同好会が発表した内容をまとめたものである。

## 2 フィボナッチ和型数列

フィボナッチ和型数列  $f_{n+2} = af_{n+1} + bf_n$  について、 $F_n = \begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_n \end{pmatrix}$  とおく。  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  とおくと、 $F_n = A^n F_0$  である。また  $m \geq 2$  とする。

**補題 1.**  $F_0$  を固定する。  $F_0, F_1, \dots, F_{\lambda+\pi-1}$  は  $\text{mod } m$  の意味で相異なり、  $F_{\lambda+\pi} \equiv F_\lambda \pmod{m}$  となる  $\lambda \geq 0, \pi \geq 1$  を取る。  $n \geq 0, k \geq 1$  とする。

このとき、  $F_{n+k} \equiv F_n \pmod{m}$  であることと、  $n \geq \lambda$  かつ  $k$  が  $\pi$  の倍数であることは同値である。

**証明.**  $n \geq \lambda$  かつ  $k = j\pi$  とすると、  $F_{\lambda+\pi} \equiv F_\lambda \pmod{m}$  より  $F_{\lambda+\pi+1} \equiv F_{\lambda+1} \pmod{m}$ 、これより  $F_{\lambda+\pi+2} \equiv F_{\lambda+2} \pmod{m}$ 。以下同様に続けて  $F_{n+\pi} \equiv F_n \pmod{m}$  を得る。よって

$$F_{n+k} = F_{n+j\pi} \equiv F_{n+(j-1)\pi} \equiv \dots \equiv F_n \pmod{m}$$

逆に  $F_{n+k} \equiv F_n \pmod{m}$  とする。  $n+k-\lambda$  を  $\pi$  で割って、  $n+k-\lambda = u\pi + v$ 、  $0 \leq v < \pi$  とすると

$$F_n \equiv F_{n+k} = F_{\lambda+u\pi+v} \equiv F_{\lambda+v} \pmod{m} \quad (1)$$

$n < \lambda$  とすると、  $0 \leq n < \lambda + v < \lambda + \pi$  であるから、(1) は  $\lambda, \pi$  の取り方に反する。よって  $n \geq \lambda$  である。  
 $n - \lambda$  を  $\pi$  で割って、  $n - \lambda = s\pi + t$ 、  $0 \leq t < \pi$  とすると

$$F_n = F_{\lambda+s\pi+t} \equiv F_{\lambda+t} \pmod{m}$$

(1) と合わせて、  $F_{\lambda+t} \equiv F_{\lambda+v} \pmod{m}$  となる。  $\pi$  の取り方から、  $t = v$

\* 原稿受理 平成26年12月5日  
\*\* 機械工学科4年生  
\*\*\* 電気情報工学科4年生  
\*\*\*\* 物質工学科1年生  
\*\*\*\*\* 教養教育科

このとき

$$k = (n + k - \lambda) - (n - \lambda) = (u\pi + v) - (s\pi + t) = (u - s)\pi$$

より、 $k$  は  $\pi$  の倍数である。 □

補題 1 の  $\lambda, \pi$  をそれぞれ  $\lambda(m, a, b, f_0, f_1), \pi(m, a, b, f_0, f_1)$  で表す。

次の 2 つの定理において、 $m$  が素数の場合は、文献 [1] で示されている。

**定理 1.**  $\lambda = \lambda(m, a, b, f_0, f_1), \pi = \pi(m, a, b, f_0, f_1), \lambda' = \lambda(m, -a, b, f_0, -f_1), \pi' = \pi(m, -a, b, f_0, -f_1)$  とおくと、 $\lambda' = \lambda$  であり、

$$\pi' = \frac{\pi}{2} \text{ または } \pi' = \pi \text{ または } \pi' = 2\pi$$

証明.  $a' = -a, b' = b, f'_1 = -f_1, f'_0 = f_0$  とし、 $f'_{n+2} = a'f'_{n+1} + b'f'_n, F'_n = \begin{pmatrix} f'_{n+1} \\ f'_n \end{pmatrix}$  とおく。まず  $f'_n = (-1)^n f_n$  を示す。 $n = 0, 1$  のときは成り立つ。 $n \geq 2$  とし、 $n - 1$  までは成り立つとすると

$$\begin{aligned} f'_n &= a'f'_{n-1} + b'f'_{n-2} = (-a)(-1)^{n-1}f_{n-1} + b(-1)^{n-2}f_{n-2} \\ &= (-1)^n(af_{n-1} + bf_{n-2}) = (-1)^n f_n \end{aligned}$$

よって  $f'_n = (-1)^n f_n$  は成り立つ。

従って

$$\begin{aligned} F'_{\lambda+2\pi} &= \begin{pmatrix} f'_{\lambda+2\pi+1} \\ f'_{\lambda+2\pi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^{\lambda+2\pi+1}f_{\lambda+2\pi+1} \\ (-1)^{\lambda+2\pi}f_{\lambda+2\pi} \end{pmatrix} = (-1)^\lambda \begin{pmatrix} -f_{\lambda+2\pi+1} \\ f_{\lambda+2\pi} \end{pmatrix} \\ &\equiv (-1)^\lambda \begin{pmatrix} -f_{\lambda+1} \\ f_\lambda \end{pmatrix} \pmod{m} \\ F'_\lambda &= \begin{pmatrix} f'_{\lambda+1} \\ f'_\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^{\lambda+1}f_{\lambda+1} \\ (-1)^\lambda f_\lambda \end{pmatrix} = (-1)^\lambda \begin{pmatrix} -f_{\lambda+1} \\ f_\lambda \end{pmatrix} \end{aligned}$$

したがって  $F'_{\lambda+2\pi} \equiv F'_\lambda \pmod{m}$  となるから、補題 1 より  $\lambda \geq \lambda', \pi' \mid 2\pi$ 。同様に  $\lambda' \geq \lambda, \pi \mid 2\pi'$ 。よって  $\lambda' = \lambda$ 。

$\pi' \mid 2\pi$  より  $2\pi = k\pi'$  を満たす自然数  $k$  がある。このとき  $2\pi' = 4\pi/k$  であるが、 $\pi \mid 2\pi'$  であるから  $4/k$  は自然数、すなわち  $k$  は 4 の約数である。よって  $k = 1, 2, 4$  で、それぞれ  $\pi' = 2\pi, \pi' = \pi, \pi' = \pi/2$ 。 □

**補題 2.**  $f_0^{(0)} = 0, f_1^{(0)} = 1, f_{n+2}^{(0)} = af_{n+1}^{(0)} + bf_n^{(0)}$  とおく。 $n \geq 1$  のとき

$$A^n = \begin{pmatrix} f_{n+1}^{(0)} & bf_n^{(0)} \\ f_n^{(0)} & bf_{n-1}^{(0)} \end{pmatrix}$$

証明.  $n = 1$  のとき  $f_2^{(0)} = a$  であるから

$$\text{右辺} = \begin{pmatrix} f_2^{(0)} & bf_1^{(0)} \\ f_1^{(0)} & bf_0^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A$$

$n \geq 2$  とし、 $n - 1$  のとき与式が成り立つとすると、

$$\begin{aligned} A^n &= A^{n-1}A = \begin{pmatrix} f_n^{(0)} & bf_{n-1}^{(0)} \\ f_{n-1}^{(0)} & bf_{n-2}^{(0)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} af_n^{(0)} + bf_{n-1}^{(0)} & bf_n^{(0)} \\ af_{n-1}^{(0)} + bf_{n-2}^{(0)} & bf_{n-1}^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{n+1}^{(0)} & bf_n^{(0)} \\ f_n^{(0)} & bf_{n-1}^{(0)} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となるから、 $n$  のとき与式が成り立つ。よって全ての  $n$  について与式が成り立つ。 □

**定理 2.** 任意の  $f_0, f_1$  について

$$\lambda(m, a, b, f_0, f_1) \leq \lambda(m, a, b, 0, 1) + 1, \quad \pi(m, a, b, f_0, f_1) \mid \pi(m, a, b, 0, 1)$$

証明. 補題 2 の記号に加えて、 $\lambda^{(0)} = \lambda(m, a, b, 0, 1)$ ,  $\pi^{(0)} = \pi(m, a, b, 0, 1)$  とおく。補題 2 を用いて

$$\begin{aligned} F_{\lambda^{(0)}+\pi^{(0)}+1} &= A^{\lambda^{(0)}+\pi^{(0)}+1} F_0 = \begin{pmatrix} f_{\lambda^{(0)}+\pi^{(0)}+2}^{(0)} & b f_{\lambda^{(0)}+\pi^{(0)}+1}^{(0)} \\ f_{\lambda^{(0)}+\pi^{(0)}+1}^{(0)} & b f_{\lambda^{(0)}+\pi^{(0)}}^{(0)} \end{pmatrix} F_0 \\ &\equiv \begin{pmatrix} f_{\lambda^{(0)}+2}^{(0)} & b f_{\lambda^{(0)}+1}^{(0)} \\ f_{\lambda^{(0)}+1}^{(0)} & b f_{\lambda^{(0)}}^{(0)} \end{pmatrix} F_0 = A^{\lambda^{(0)}+1} F_0 = F_{\lambda^{(0)}+1} \pmod{m} \end{aligned}$$

補題 1 より、 $\lambda(m, a, b, f_0, f_1) \leq \lambda^{(0)} + 1$  かつ  $\pi(m, a, b, f_0, f_1) \mid \pi^{(0)}$  □

**命題 1.** 任意の  $f_0, f_1$  について

$$\lambda(m, a, b, f_0, f_1) \leq \max(\lambda(m, a, b, 1, 0), \lambda(m, a, b, 0, 1))$$

証明.  $f_0^{(0)} = 1, f_1^{(0)} = 0, f_{n+2}^{(0)} = a f_{n+1}^{(0)} + b f_n^{(0)}, F_n^{(0)} = \begin{pmatrix} f_{n+1}^{(0)} \\ f_n^{(0)} \end{pmatrix}, \lambda^{(0)} = \lambda(m, a, b, 1, 0), \pi^{(0)} = \pi(m, a, b, 1, 0),$

$f_0^{(1)} = 0, f_1^{(1)} = 1, f_{n+2}^{(1)} = a f_{n+1}^{(1)} + b f_n^{(1)}, F_n^{(1)} = \begin{pmatrix} f_{n+1}^{(1)} \\ f_n^{(1)} \end{pmatrix}, \lambda^{(1)} = \lambda(m, a, b, 0, 1), \pi^{(1)} = \pi(m, a, b, 0, 1)$  と

おく。また  $\tilde{\lambda} = \max(\lambda^{(0)}, \lambda^{(1)})$ ,  $\tilde{\pi} = \text{lcm}(\pi^{(0)}, \pi^{(1)})$  とおく。

まず  $F_n = f_0 F_n^{(0)} + f_1 F_n^{(1)}$  を示す。 $n = 0$  のとき

$$F_0 = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_0 \end{pmatrix} = f_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + f_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = f_0 F_0^{(0)} + f_1 F_0^{(1)}$$

$n \geq 1$  のとき

$$F_n = A^n F_0 = f_0 A^n F_0^{(0)} + f_1 A^n F_0^{(1)} = f_0 F_n^{(0)} + f_1 F_n^{(1)}$$

よって  $F_n = f_0 F_n^{(0)} + f_1 F_n^{(1)}$  は成り立つ。

$\tilde{\lambda} \geq \lambda^{(0)}, \pi^{(0)} \mid \tilde{\pi}$  であるから、補題 1 により  $F_{\tilde{\lambda}+\tilde{\pi}}^{(0)} \equiv F_{\tilde{\lambda}}^{(0)} \pmod{m}$ 。同様に  $F_{\tilde{\lambda}+\tilde{\pi}}^{(1)} \equiv F_{\tilde{\lambda}}^{(1)} \pmod{m}$ 。よって

$$F_{\tilde{\lambda}+\tilde{\pi}} = f_0 F_{\tilde{\lambda}+\tilde{\pi}}^{(0)} + f_1 F_{\tilde{\lambda}+\tilde{\pi}}^{(1)} \equiv f_0 F_{\tilde{\lambda}}^{(0)} + f_1 F_{\tilde{\lambda}}^{(1)} = F_{\tilde{\lambda}} \pmod{m}$$

補題 1 より主張を得る。 □

**予想 1.** 任意の  $f_0, f_1$  について  $\lambda(m, a, b, f_0, f_1) \leq \lambda(m, a, b, 0, 1)$

考察 数値実験の結果は上記を支持する。

### 3 フィボナッチ積型数列

フィボナッチ積型数列  $g_{n+2} = (g_{n+1})^a (g_n)^b$  について、 $G_n = \begin{pmatrix} g_{n+1} \\ g_n \end{pmatrix}$  とおく。補題 1 と同様に、次を得る。

**補題 3.**  $G_0$  を固定する。 $G_0, G_1, \dots, G_{\lambda+\pi-1}$  は  $\text{mod } m$  の意味で相異なり、 $G_{\lambda+\pi} \equiv G_{\lambda} \pmod{m}$  となる  $\lambda \geq 0, \pi \geq 1$  を取る。 $n \geq 0, k \geq 1$  とする。

このとき、 $G_{n+k} \equiv G_n \pmod{m}$  であることと、 $n \geq \lambda$  かつ  $k$  が  $\pi$  の倍数であることは同値である。

上記の  $\lambda, \pi$  をそれぞれ  $\lambda_P(m, a, b, g_0, g_1), \pi_P(m, a, b, g_0, g_1)$  で表す。

カーマイケル関数を  $\Lambda(m)$  とする。すなわち、

$$\Lambda(2) = 1 \quad \Lambda(2^2) = 2 \quad \Lambda(2^e) = 2^{e-2} \quad (e \geq 3)$$

$$\Lambda(p^e) = p^{e-1} (p-1) \quad (p \text{ は奇素数})$$

$$\Lambda(p_1^{e_1} \cdots p_k^{e_k}) = \text{lcm}(\Lambda(p_1^{e_1}), \dots, \Lambda(p_k^{e_k})) \quad (p_1, \dots, p_k \text{ は相異なる素数で、} e_j \geq 1)$$

このとき、 $\text{gcd}(g, m) = 1$  を満たす全ての  $g$  について、 $g^{\Lambda(m)} \equiv 1 \pmod{m}$  である [2]。

**補題 4.**  $m$  を素因数分解し  $m = p_1^{e_1} \cdots p_k^{e_k}$  とする。ここで、 $p_1, \dots, p_k$  は相異なる素数で、 $e_j \geq 1$  である。 $e = \max(e_1, \dots, e_k)$  とおくと、任意の  $g$  について  $g^{e+\Lambda(m)} \equiv g^e \pmod{m}$  である。

証明.  $g = p_1^{d_1} \cdots p_k^{d_k} \cdot h$  とする。ここで、 $d_j \geq 0$  かつ  $\gcd(h, m) = 1$  である。

$d_j \geq 1$  のとき、 $d_j e \geq e_j$  であるから、 $(p_j^{d_j})^e \equiv 0 \pmod{p_j^{e_j}}$ 。よって  $g^e \equiv 0 \equiv g^{e+\Lambda(m)} \pmod{p_j^{e_j}}$ 。  
 $d_j = 0$  のとき、 $\gcd(g, p_j^{e_j}) = 1$  であり、 $\Lambda(p_j^{e_j}) \mid \Lambda(m)$  であるから、 $g^{\Lambda(m)} \equiv 1 \pmod{p_j^{e_j}}$  である。よって  $g^{e+\Lambda(m)} \equiv g^e \pmod{p_j^{e_j}}$ 。従っていずれの場合も  $g^{e+\Lambda(m)} \equiv g^e \pmod{p_j^{e_j}}$  が成り立つ。よって孫子の剰余定理により、 $g^{e+\Lambda(m)} \equiv g^e \pmod{m}$  が成り立つ。□

**定理 3.** 各  $m$  について補題 4 と同様に  $e$  を定める。 $a \geq e$  のとき

$$\lambda_{\mathbb{P}}(m, a, b, g_0, g_1) = \lambda_{\mathbb{P}}(m, a + \Lambda(m), b, g_0, g_1)$$

$$\pi_{\mathbb{P}}(m, a, b, g_0, g_1) = \pi_{\mathbb{P}}(m, a + \Lambda(m), b, g_0, g_1)$$

$b \geq e$  のとき

$$\lambda_{\mathbb{P}}(m, a, b, g_0, g_1) = \lambda_{\mathbb{P}}(m, a, b + \Lambda(m), g_0, g_1)$$

$$\pi_{\mathbb{P}}(m, a, b, g_0, g_1) = \pi_{\mathbb{P}}(m, a, b + \Lambda(m), g_0, g_1)$$

証明.  $a \geq e$  とする。 $g'_0 = g_0, g'_1 = g_1, g'_{n+2} = (g'_{n+1})^{a+\Lambda(m)} (g'_n)^b$  とする。 $g'_n \equiv g_n \pmod{m}$  を示す。 $n \geq 2$  とし、 $n-1$  までは成り立つとすると、補題 4 を用いて

$$\begin{aligned} g'_n &= (g'_{n-1})^{a+\Lambda(m)} (g'_{n-2})^b \equiv (g_{n-1})^{a+\Lambda(m)} (g_{n-2})^b \\ &\equiv (g_{n-1})^a (g_{n-2})^b = g_n \pmod{m} \end{aligned}$$

よって全ての  $n$  について  $g'_n \equiv g_n \pmod{m}$  が成り立つ。特に

$$\lambda_{\mathbb{P}}(m, a, b, g_0, g_1) = \lambda_{\mathbb{P}}(m, a + \Lambda(m), b, g_0, g_1)$$

$$\pi_{\mathbb{P}}(m, a, b, g_0, g_1) = \pi_{\mathbb{P}}(m, a + \Lambda(m), b, g_0, g_1)$$

が成り立つ。後半も同様。□

素数  $m$  について、その原始根の一つを  $c$  とすると、 $g \not\equiv 0 \pmod{m}$  なる任意の  $g$  に対し  $c^f \equiv g \pmod{m}$  となる  $f$  ( $0 \leq f < m-1$ ) が唯一つ取れる。その  $f$  を  $\log_c g$  と書く。

**補題 5.**  $g_1 \not\equiv 0, g_2 \not\equiv 0, g \not\equiv 0 \pmod{m}$  とする。

(1)  $g_1 \equiv g_2 \pmod{m}$  と  $\log_c g_1 = \log_c g_2$  は同値である。

(2)  $\log_c (g_1 g_2) \equiv \log_c g_1 + \log_c g_2 \pmod{m-1}$

(3)  $\log_c g^a \equiv a \log_c g \pmod{m-1}$

証明. (1)  $g_1 \equiv g_2 \pmod{m}$  とすると、 $\log_c g$  の定義により  $\log_c g_1 = \log_c g_2$ 。逆に  $f = \log_c g_1 = \log_c g_2$  とすると、 $g_1 \equiv c^f \equiv g_2 \pmod{m}$ 。

(2)  $f_1 = \log_c g_1, f_2 = \log_c g_2, f = \log_c (g_1 g_2)$  とおくと、 $c^f \equiv g_1 g_2 \equiv c^{f_1} c^{f_2} = c^{f_1+f_2} \pmod{m}$ 。 $c$  は原始根だから、 $f \equiv f_1 + f_2 \pmod{m-1}$ 。

(3)  $f = \log_c g, f' = \log_c g^a$  とおくと、 $c^{f'} \equiv g^a \equiv (c^f)^a = c^{af} \pmod{m}$ 。よって  $f' \equiv af \pmod{m-1}$ 。□

**定理 4.** 素数  $m$  について、 $g_0 \not\equiv 0, g_1 \not\equiv 0 \pmod{m}$  に対し、

$$\lambda_{\mathbb{P}}(m, a, b, g_0, g_1) = \lambda(m-1, a, b, \log_c g_0, \log_c g_1)$$

$$\pi_{\mathbb{P}}(m, a, b, g_0, g_1) = \pi(m-1, a, b, \log_c g_0, \log_c g_1)$$

証明.  $f_0 = \log_c g_0, f_1 = \log_c g_1$  とし、 $f_{n+2} = af_{n+1} + bf_n$  とおく。このとき  $f_n \equiv \log_c g_n \pmod{m-1}$  であることを示す。 $n \geq 2$  とし、 $n-1$  まで正しいとすると

$$\begin{aligned} f_n &= af_{n-1} + bf_{n-2} \equiv a \log_c g_{n-1} + b \log_c g_{n-2} \\ &\equiv \log_c (g_{n-1}^a g_{n-2}^b) = \log_c g_n \pmod{m-1} \end{aligned}$$

よって  $f_n \equiv \log_c g_n \pmod{m-1}$  は成り立つ。

$$\begin{aligned} \lambda_P &= \lambda_P(m, a, b, g_0, g_1) & \pi_P &= \pi_P(m, a, b, g_0, g_1) \\ \lambda &= \lambda(m-1, a, b, f_0, f_1) & \pi &= \pi(m-1, a, b, f_0, f_1) \end{aligned}$$

とおく。

$$f_{\lambda_P + \pi_P} \equiv \log_c g_{\lambda_P + \pi_P} = \log_c g_{\lambda_P} \equiv f_{\lambda_P} \pmod{m-1}$$

補題 1 より、 $\lambda \leq \lambda_P$  かつ  $\pi \mid \pi_P$  である。また

$$g_{\lambda + \pi} \equiv c^{f_{\lambda + \pi}} \equiv c^{f_\lambda} \equiv g_\lambda \pmod{m}$$

補題 3 より、 $\lambda_P \leq \lambda$  かつ  $\pi_P \mid \pi$  である。よって  $\lambda_P = \lambda$  かつ  $\pi_P = \pi$  が成り立つ。 □

## 4 追記

フィボナッチ和型数列について

$$\text{全ての } a, b \text{ について} \quad \max_{f_0, f_1} \lambda(m, a, b, f_0, f_1) = \max_{f_0, f_1} \lambda(m, a, -b, f_0, f_1) \quad (2)$$

が予想されたが、 $m = 27$  のとき成り立たないことが分かった：

$$\max_{f_0, f_1} \lambda(27, 3, 9, f_0, f_1) = 4 \quad \max_{f_0, f_1} \lambda(27, 3, -9, f_0, f_1) = 3$$

予想 2. (2) が成り立たない  $m$  は、ある  $k \geq 3$  について  $k^3$  の倍数である。

考察 数値実験を行ったところ、(2) が成り立たない  $m$  は、 $m \leq 140$  の範囲では  $m = 27, 54, 64, 81, 108, 125, 135$ 、すなわち

$$m = 3^3, 2 \cdot 3^3, 2^6, 3^4, 2^2 \cdot 3^3, 5^3, 5 \cdot 3^3$$

のみであった。この範囲で予想 2 は成り立っている。なお、 $m = 128 = 2^7$  のとき (2) は成り立つので、予想 2 の逆は成り立たない。

## 参考文献

- [1] 小笹 航平、山根 映介、古清水 大直、倉田 久靖. 素数を法としたフィボナッチ型数列の周期. 米子工業高等専門学校 研究報告, 第 49 号, 平成 26 年.
- [2] Weisstein, Eric W. "Carmichael Function." From MathWorld—A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/CarmichaelFunction.html>