放物線作図器と正多角形

A parabola drawer and regular polygons

柴田 孝祐 **,　　堀畑 佳宏 ***

Kosuke SHIBATA,　Yoshihiro HORIHATA

概要

定規とコンパスを用いた通常の作図方法では例えば正 7 角形を作図することができない。本論文では、作図の際に使用可能な道具として 2 次曲線の 1 つである放物線を描くことのできる作図器（放物線作図器）を加えた際に、どのような正多角形が新たに作図可能となるか、そしてまたどのような正多角形が依然として作図不可能であるかについての、完全な解答を紹介する。さらに 3 次曲線 $y = x^3$ を描くことのできる作図器を加えたときに描くことのできる正 n 角形における n の必要十分条件を紹介する。

1　はじめに

数学の（大胆さを許していただければ、学問の）意義の１つとして、「**対象に直接触れることなく対象を知る**」という点があると言えないだろうか。古くは、例えば浜辺から沖に見える船までの距離を、直接に測るのではなく、三角測量によって測ることができる。現代では例えば、地中に埋まっている石油を、直接に掘ることなく、ウェーブレットを用いて探すことができる。

本論文では、作図可能性について、実際に作図行為を行って確かめるのではなく、理論的な議論を紹介する。具体的には、作図の道具を定規とコンパスに加え放物線作図器を用いた場合の正多角形の作図可能/不可能性について、新たに得られた結果について報告する。

2　作図について

数学において重要な仕事は、「良い問題を作る事」と「未解決問題を解決する事」が挙げられる。古くからある良い問題として次の**古代ギリシャの 3 大作図問題**が挙げられるであろう。

立法倍積問題：与えれた立方体の体積の倍の体積を持つ立方体の一辺を作図せよ。

円積問題：与えれた円の面積に等しい面積を持つ正方形を作図せよ。

角の 3 等分問題：与えれた角を 3 等分する直線を作図せよ。

当時はまだ作図に使うことのできる道具が定規とコンパスのみに制限されておらず、したがってこれらの問題を解くために多くの美しい曲線が導入された。例えば、紀元前 425 年頃にヒッピアスが「円積曲線」を考え、円積問題と角の 3 等分問題を解いたとされる。紀元前 4 世紀にメナイクモスは円錐曲線を考え、立法倍積問題を解いたとされる。

一方、現代において「作図」とは通常、定規とコンパスを何度か用いることによって図形を描くことを意味する。このように、作図の際に使うことのできる道具を定規とコンパスに制限したのはプラトンだと言われている。そして上の 3 大作図問題に対し、19 世紀に入ってからこれらがみな、通常の意味で作図不可能であることが証明された。

ここで、オッカムの剃刀にならい、使える道具に制限をかける、より一般的には数学における公理を制限する、という発想は重要な意味を持つ [1]。使用できる公理を制限することによって、ある定理を証明する際にどの公理が本質的に用いられていたのかが分かる場合がある。その意味で、**不要な仮定を除去することは、単に理**

* 原稿受理　平成 26 年 12 月 5 日

** 建築学科 5 年生

*** 教養教育科・数学

[1] 数学における一分野である数学基礎論では、公理を制限することは日常的に行われる。例えば、1900 年前後に起きた数学の基礎である素朴集合論に矛盾が相次いで発見された。その原因はその公理（内包公理）の強さゆえであるとされ、矛盾が導かれないよう内包公理等に制限をかけて発展した理論が公理論的集合論である。さらに公理を制限することにより、どれくらいの数学が展開できなくなるかを測っているのが逆数学である。逆数学については本報告集の堀畑『数学における「エコ」の実践』を参照。

論としての美しさを目指すのみならず、その制限された世界の限界を境界づけることにより、新たな（そして建設的な）公理の渇望を生み出すことがある。

プラトンが作図の道具に制限をかけた例もしかり、と言えよう。すなわち作図における道具を定規とコンパスに制限することにより、作図可能性に限界が生まれ、その不可能性を示すために数学の理論が発達した面があるといえるだろう。

次節ではこの通常の作図の道具に加え、放物線作図器を加えた際に、作図することのできる正多角形がどれだけ豊富になるかを調べる。

3　放物線作図器と正多角形

以下で単に「作図」と書く場合には通常の「定規とコンパスのみを用いる作図」を意味する。使用可能な道具に放物線作図器を追加した場合の作図については「放物線作図器を用いた作図」等と注意を付して書くことにする。

放物線作図器とは、与えられた点と直線をそれぞれ焦点と準線とする放物線を作図できる道具である。本稿ではこのような放物線作図器が仮想的に存在するとして議論を進めるが、実際に放物線作図器を作り放物線を描くことも可能である。例えば、16 世紀末にはデカルトが定規と紐を用いて放物線や楕円、双曲線を描いた。17 世紀にはスコーテンが、平行四辺形を利用して楕円や双曲線を、ひし形を利用して放物線を描いた [2]。

正多角形の作図可能性については、例えば正 3 角形や正方形、正 5 角形、正 6 角形は定規とコンパスのみで作図可能であるが、正 7 角形を作図することはできない。より複雑な正多角形として、1796 年に当時 19 歳だったガウスは、正 17 角形が通常の意味で作図可能であることを発見した。

さらにガウスは 1801 年に、正 n 角形が作図可能であるための必要十分条件を次のように与えた：

ガウスの正多角形の作図可能条件

以下は同値である：
(1) 正 n 角形が作図可能である；
(2) $n = 2^r {p_1}^{i_1} \cdots {p_m}^{i_m} (r \geq 0,\ m \geq 0,\ i_j \geq 1$ $(1 \leq j \leq m),\ p_1, \cdots, p_m$ は互いに異なる奇素数$)$ と素因数分解したとき、各 $j\,(1 \leq j \leq m)$ に対し、$i_j = 1$ かつ p_j はフェルマー素数である。

ここで素数 p が**フェルマー素数**であるとは、ある k が存在して $p = 2^k + 1$ となるときをいう。例えば 3, 5, 17 などはフェルマー素数で、7, 11, 13 などはフェルマー素数でない。したがって上のガウスの結果によって、正 7 角形、正 11 角形、正 13 角形は定規とコンパスでは作図できないことが分かる。

そこで作図に使える道具に放物線作図器を加えたらどうなるだろうか？ [3] 通常の作図と比較して、新たに作図可能な正多角形はあるだろうか？この課題に対し柴田は次を証明した：

定理 1

以下は同値である：
(1) 正 n 角形が放物線作図器を用いて作図可能；
(2) $n = 2^r 3^s {p_1}^{i_1} \cdots {p_m}^{i_m} (r, s \geq 0,\ m \geq 0,\ i_j \geq 1$ $(1 \leq j \leq m),\ p_1, \cdots, p_m$ は 5 以上の相異なる素数$)$ と素因数分解したとき、各 $j\,(1 \leq j \leq m)$ に対し、$i_j = 1$ かつ、ある k と l $(k, l \geq 0)$ が存在して、$p_j = 2^k 3^l + 1$ となる。

上の (2) において $l = 0$、s を 0 または 1 とすれば、ガウスの結果における (2) と同じ条件になるので、この結果はガウスの結果の一般化と言える。

放物線作図器を用いた作図で新たに作図可能となる正 n 角形の n は、7, 9, 13, 14, $\cdots$ である。しかしながら次の n に対し正 n 角形は放物線作図器を用いても作図不可能である：$n = 11, 22, 23, 25, \cdots$。

さらに曲線 $y = x^3$ が（何らかの作図器を用いて）作図可能であるとき、より一般化された次の定理を得る：

[2] 米子高専数学同好会ではスコーテンの発想による放物線作図器を実際に作成し、放物線を描くことに成功した。また次世代科学者育成講座でも、参加した中学生と本原稿著者の堀畑で同様の放物線作図器を作成し、さらに放物線作図器を用いれば、通常の作図では作図不可能な「角の三等分」も作図可能であることを確認した。

[3] 放物線作図器を加えた場合、角の 3 等分問題が解決できること等については堀畑・柴田・竹内 [1] を参照。

定理２

以下は同値である：
(1) 正 n 角形が $y=x^3$ を用いて作図可能；
(2) $n = 2^r 3^s 5^t {p_1}^{i_1} \cdots {p_m}^{i_m} (r, s, t \geq 0,\ m \geq 0,\ i_j \geq 1$
$(1 \leq j \leq m)$, $p_1, \cdots, p_m$ は7以上の相異なる素数)
と素因数分解したとき、各 $j\,(1 \leq j \leq m)$ に対し、
$i_j = 1$ かつ、ある k, l, u $(k, l, u \geq 0)$ が存在して、
$p_j = 2^k 3^l 5^u + 1$ となる。

したがって $y=x^3$ を用いた作図においては、新たに正 11 角形や正 22 角形が作図可能となるが、正 23 角形は依然として作図不可能である。

それではさらに $y=x^4$ を用いれば作図可能な正多角形は増えるであろうか。もちろんこのこと自体は正しい。しかしながらその分析は今までと全く同じようには進まない。曲線 $y=x^4$ と円 $\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2=\frac{a^2}{4}$ との連立方程式から次を得る：

$$x^7+x-a=0$$

もし全ての 7 次方程式がこの形の方程式に還元できるのならば話は今までと同じであるが、一般に上の形に還元することはできない。一般に知られていることは、n 次方程式において、その中の $n-1$, $n-2$, $n-3$ 次の項は消去できることである。したがって係数が作図可能数である全ての 7 次方程式の解を作図できるためには $y=x^4$ 以外の道具を用いる必要がある [4]。

最後に今後の課題を述べて本稿を締めくくる。

課題１ 係数が全て作図可能数である 7 次方程式の解を作図できるための道具を考える。

課題２ より一般の正 n 角形を作図するための道具を考える。

参考文献

[1] 堀畑佳宏, 柴田孝祐, 竹内彩結実, **角の三等分の作図可能性**,
米子高専研究報告, No49, p.26-36, 2014

[4] 係数が作図可能数である任意の 3 次方程式の解は $y=x^2$ を用いて作図可能である。また、係数が作図可能数である任意の 4 次方程式の解は $y=x^3$ を用いて作図可能である。これらの結果については [1] を参照。