

角の三等分の作図可能性

The constructibility of trisection of an angle

堀畑 佳宏 **,

Yoshihiro HORIHATA,

柴田 孝祐 ***,

竹内 彩結実 ****

Kosuke SHIBATA, Ayumi TAKEUCHI

概要

定規とコンパスを用いた通常の作図方法では、一般に角の三等分を作図することはできない。本論文では、通常の作図方法とは異なる三種類の作図方法：(1) 目盛のついた定規による作図；(2) 折り紙による作図；(3) 放物線作図機による作図、による角の三等分の作図を紹介する。また、これらの作図方法による、代数方程式の解の作図可能性について考察する。これらの作図方法の表現力の差異の問題は興味深い、ここでは課題として挙げ、その考察は次回以降に報告したい。なお、本論文で記述される内容は、米子高専数学同好会の勉強会で得られたものである。

目次

1	はじめに	1
2	角の三等分の作図不可能性	1
2.1	命題1の証明	2
2.1.1	“ \Leftarrow ”の証明	2
2.1.2	“ \Rightarrow ”の証明	3
2.2	命題2の証明	4
2.3	命題3の証明	4
2.4	命題4の証明	5
3	角の三等分の「作図」可能性	6
3.1	長さを記録できる定規による作図	6
3.2	折り紙による作図	7
3.2.1	折り紙による作図の手順	7
3.2.2	折り紙による角の三等分	8
3.3	放物線作図機による作図	9
4	代数方程式の解の作図可能性	10
4.1	折り紙と代数方程式	10
4.2	放物線作図機と代数方程式	10
5	課題	11

1 はじめに

本論文では、ギリシャの3大作図問題の1つである、『角の三等分問題』について考察する。角の三等分問題とは、「任意に与えられた角を三等分することは可能か？」という問題である。通常の作図法、すなわちコンパスと目盛の無い定規を用いた作図法¹では、一般に与えられた角の三等分を作図することは不可能であることが知られている。しかしながら、道具の使い方を変更したり、新しい道具を追加することにより、角の三等分を作図できる場合がある。

そこでまず、2節において、通常の作図法では角の三等分の作図が不可能であることを、初等的な手法で証明する。次に、3節において、以下の三種類の方法では角の三等分が作図できることを概観する。

- 目盛のついた定規を使用する作図法 (3.1 節)
- 折り紙を用いた作図法 (3.2 節)
- 放物線を描ける道具を用いた作図法 (3.3 節)

2 角の三等分の作図不可能性

本節では、通常の作図法では角の三等分を作図することはできないことを証明する。そのためには、ある角度

¹このように、作図をコンパスと定規に制限したのはプラトンであるという説がある。

* 原稿受理 平成 25 年 12 月 6 日

** 教養教育科・数学

*** 建築学科 4 年生

**** 物質工学科 2 年生

θ で $\frac{\theta}{3}$ が作図できないものが存在することを証明すればよい。ここでは $\theta = 60^\circ$ として角度 20° が作図できないことを証明する。

まず、有理数体の拡大を準備し、その後に作図不可能性の証明の流れを述べる。有理数全体の集合 \mathbb{Q} に \sqrt{c} ($c \in \mathbb{Q}$) なる形の無理数を、四則演算で閉じているように追加していくことを考える。複素数全体の集合 \mathbb{C} の部分集合 $A \subseteq \mathbb{C}$ と $c \in \mathbb{C}$ に対し、集合 A に \sqrt{c} を追加した集合 $A[\sqrt{c}]$ を次で定める。

$$A[\sqrt{c}] = \{a + b\sqrt{c} \mid a, b \in A\}$$

定義

実数の部分集合の列 $\{Q_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ を次のように帰納的に定義する：

$$\begin{cases} Q_0 = \mathbb{Q} \\ Q_{n+1} = Q_n[\sqrt{c_{n+1}}] \quad c_{n+1} \in Q_n, \sqrt{c_{n+1}} \notin Q_n \end{cases}$$

集合 Q_n の基本的な性質を確認しておく。

補題 1

以下が成り立つ。

- (1) $Q_0 \subseteq Q_1 \subseteq \dots \subseteq Q_n \subseteq \dots$
- (2) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し Q_n は、四則演算について閉じている。つまり Q_n は体である。

角の三等分の作図不可能性を、次の 4 ステップに分けて証明していく。ただし線分の長さを考えるので、単位となる長さ 1 の線分は与えられているとする。ここでは、数 α が作図可能であるとは、長さが α である線分を作図できることをいう。また、適当に座標を設定することにより、負の数に対応する長さの線分の作図も考えることができる。本節では以後、多項式 $f(x)$ は

$$f(x) = x^3 - 3x - 1$$

とする。

命題 1

数 α が作図可能である \Leftrightarrow ある自然数 $n \in \mathbb{N}$ が存在して $\alpha \in Q_n$ となる。

命題 2

$\cos 20^\circ$ が作図可能である \Leftrightarrow 多項式 $f(x)$ の実根で作図可能なものが存在する。

命題 3

多項式 $f(x)$ は、有理数の根をもたない。

命題 4

$n \geq 1$ を自然数とする。「 $\alpha \in Q_n$ かつ $f(\alpha) = 0$ となる α が存在する」 \Rightarrow 「 $\beta \in Q_{n-1}$ かつ $f(\beta) = 0$ となる β が存在する」。

これらが証明されたとき、角の三等分が作図不可能であることは次のように証明できる。

角の三等分の作図不可能性の証明： もし $\cos 20^\circ$ が作図可能ならば、命題 2 と命題 1 より、ある実数 α が存在して $f(\alpha) = 0$ かつ、ある自然数 n が存在して $\alpha \in Q_n$ となる。命題 3 より α は有理数でないので $n \geq 1$ である。よって、命題 4 よりある実数 β が存在して、 $f(\beta) = 0$ かつ $\beta \in Q_{n-1}$ となる。これを繰り返すと、ある実数 γ が存在して、 $f(\gamma) = 0$ かつ $\gamma \in \mathbb{Q}$ となる。しかしこれは命題 3 に矛盾する。したがって、 $\cos 20^\circ$ は作図不可能である。■

以下の各節で命題 1 ~ 4 を順に証明していく。

2.1 命題 1 の証明

以下で、命題 1 を証明する。

命題 1 (再掲)

数 α が作図可能である \Leftrightarrow ある自然数 $n \in \mathbb{N}$ が存在して $\alpha \in Q_n$ となる。

2.1.1 “ \Leftarrow ” の証明

まず、命題 1 の主張の右から左が成り立つことを示す。与えられた数 (を長さにもつ線分) から四則演算やルートによって得られる数 (を長さにもつ線分) は、作図可能である。このことを順に確認していく。

(i) 線分の和差：AB の長さを a 、BP の長さを b とするとき、中心が B で半径 b の円と直線 AB の交点 C、D を図のようにとると、 $AC = a + b$ 、 $AD = a - b$ が作図できる²。

²長さ 1 の線分は与えられているとする。

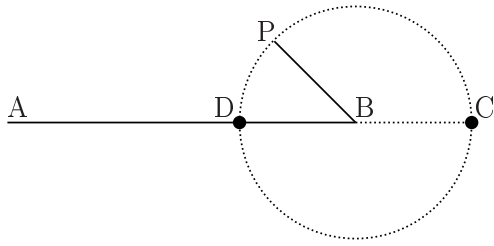


図 1: 和と差

(ii) 線分の積商：まず積について．OP を長さ 1 の線分，OA を長さ a の線分，OB を長さ b の線分とする． $a \times b$ を作図するには，まず線分 BP を描く．点 A を通り BP に平行な直線と直線 OB の交点を C とすると，OC の長さが $a \times b$ となる．

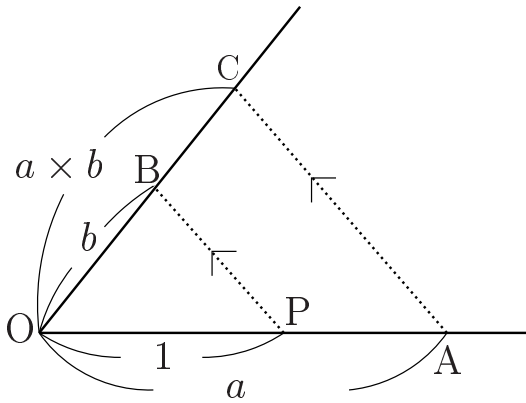


図 2: 積

同様に商 $\frac{b}{a}$ も作図できる．

(iii) ルート：図のように， $AC = a$ ， $CB = 1$ となるように，線分 AB を描く．AB を直径とする上半円を描く．C を通り，AB に垂直な直線と半円との交点を P とするとき，BP の長さが \sqrt{a} となっている．

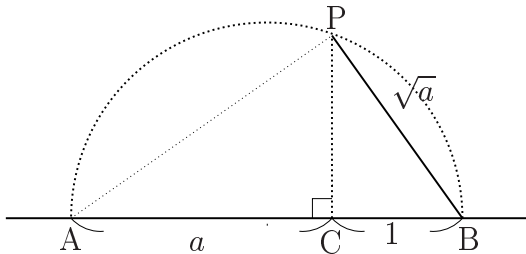


図 3: ルート

これらのことをまとめると，与えられた数（長さ）か

ら四則演算およびルートをつけて得られる数（長さ）は作図可能であることがわかる．

したがって特に，先に述べたように長さ 1 の線分は与えられていることから，任意の有理数は作図可能である．さらに与えられた数のルートも作図可能であることから，任意の自然数 n に対し， Q_n に属する数はすべて作図可能である．

よって $\alpha \in Q_n$ ならば α は作図可能である．

2.1.2 “ \Rightarrow ” の証明

次に，命題 1 の主張の左から右が成り立つことを示す．
 定規とコンパスで作図できる「点」は以下の 3 パターンである：

- (i) 直線と直線の交点；
- (ii) 直線と円の交点；
- (iii) 円と円の交点．

まず (i) の場合を考えてみる．2 つの直線の方程式を $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ， $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ とする．この交点は，連立 1 次方程式

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

を解くことによって得られる．これを解くには，例えば上式を a_2 倍，下式を a_1 倍して，辺々引くと y についての 1 次式になる．求めた y を上式に代入すると x も求まる．実際に求めると，次のようになる³． x, y 共に，それぞれの直線の方程式の係数から四則演算によって得られている点が重要である．

$$x = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - b_1a_2}, \quad y = \frac{a_2c_1 - a_1c_2}{a_1b_2 - b_1a_2}$$

次に (ii) について考える．この交点は，連立 2 次方程式

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ (x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 - r^2 = 0 \end{cases}$$

を解くことによって得られる．これを解くには，例えば，上式を x について解いて，その結果を下式の x に代入すると， y についての 2 次方程式になる．これは解の公式を使って解くことができる． y についても同様に解を得られる．重要な点は， x, y 共に上の連立方程式の係数から四則演算とルートをつける作業によって得られる．

³ただしこの 2 直線が平行だと交点をもたないので，平行でないとする．つまり， $\frac{a_1}{b_1} \neq \frac{a_2}{b_2}$ とする．

(iii) の交点は次の連立 2 次方程式を解くことによって得られる.

$$\begin{cases} (x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 - r_1^2 = 0 \\ (x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 - r_2^2 = 0 \end{cases}$$

上式から下式を引くと, x と y の一次式になる. これを y について解いて上式に代入すると x の 2 次式を得る. 同様に x について解いて上式に代入すると y の 2 次式を得る. これらはともに, 係数から四則演算とルートをつける作業で解を得られる.

したがって作図可能な数は, 与えられた数 (a_1, b_1, c_1, r_1 など) から四則演算およびルートをつけて得られる数に限られることがわかる. 特に今は長さ 1 の線分が与えられているので, 作図可能な数は有理数およびそれらに四則演算とルートを有限回つけた数に限られることが分かった.

よって, 数 α が作図可能ならば, ある自然数 n が存在して $\alpha \in \mathbb{Q}_n$ となる.

2.2 命題 2 の証明

以下で, 命題 2 を証明する.

命題 2 (再掲)

$\cos 20^\circ$ が作図可能である \Leftrightarrow 多項式 $f(x)$ の実根で作図可能なものが存在する.

$\angle AOB = 60^\circ$ なる角が描かれているとする. この角の 3 等分を作図するには, $\cos 20^\circ$ の長さが作図できればよい⁴.

加法定理を用いて $\cos \theta$ を変形すると,

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \cos \left(\frac{2\theta}{3} + \frac{\theta}{3} \right) \\ &= \cos \frac{2\theta}{3} \cos \frac{\theta}{3} - \sin \frac{2\theta}{3} \sin \frac{\theta}{3} \\ &= \left(2 \cos^2 \frac{\theta}{3} - 1 \right) \cos \frac{\theta}{3} - 2 \sin^2 \frac{\theta}{3} \cos \frac{\theta}{3} \\ &= \left(2 \cos^2 \frac{\theta}{3} - 1 \right) \cos \frac{\theta}{3} - 2 \left(1 - \cos^2 \frac{\theta}{3} \right) \cos \frac{\theta}{3} \\ &= 2 \cos^3 \frac{\theta}{3} - \cos \frac{\theta}{3} - 2 \cos \frac{\theta}{3} + 2 \cos^3 \frac{\theta}{3} \\ &= 4 \cos^3 \frac{\theta}{3} - 3 \cos \frac{\theta}{3} \end{aligned}$$

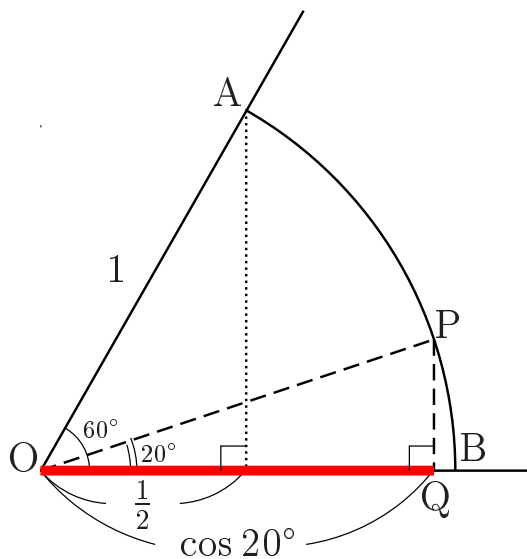


図 4: $\cos 20^\circ$

ところで, $\cos \theta = \frac{1}{2}$ だったので, 上の結果より,

$$\frac{1}{2} = 4 \cos^3 \frac{\theta}{3} - 3 \cos \frac{\theta}{3}$$

$y = \cos \frac{\theta}{3}$ とおくと,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} = 4y^3 - 3y &\Leftrightarrow 4y^3 - 3y - \frac{1}{2} = 0 \\ &\Leftrightarrow 8y^3 - 6y - 1 = 0 \end{aligned}$$

さらに $x = 2y$ とおくと

$$8y^3 - 6y - 1 = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x - 1 = 0$$

よって, 3 次方程式 $x^3 - 3x - 1 = 0$ の解の長さをもつ線分が作図できれば, それを半分にするにより, 長さ $\cos 20^\circ$ の線分が作図可能となる. したがって,

$\cos 20^\circ$ が作図可能

\Downarrow

$x^3 - 3x - 1 = 0$ の解が作図可能

2.3 命題 3 の証明

以下で, 命題 3 を証明する. まず次の補題を用意する⁵.

⁴図における線分 OQ が作図できれば, 点 Q を通る OB に垂直な直線を描き, 弧 AB との交点を P とすれば, $\angle POB = 20^\circ$ となる. 一般に, 「角 θ が作図可能」 \Leftrightarrow 「長さ $\cos \theta$ が作図可能」.

⁵この補題はより一般に, 任意の整数係数モニック多項式に対し成り立つ.

補題 2

多項式 $f(x)$ の実根は、無理数でなければ整数に限る。つまり、有理数の根をもつならばそれは整数の解である。

証明： $f(\alpha) = 0$ となる有理数 α を任意に固定する。ここで α が整数でないを仮定する。よって互いに素⁶な整数 p, q が存在して $\alpha = \frac{q}{p}$ かつ $p \neq 1$ と表せられる。 $f(\alpha) = 0$ より

$$\left(\frac{q}{p}\right)^3 - 3\left(\frac{q}{p}\right) - 1 = 0.$$

両辺に p^3 をかけて、

$$\begin{aligned} q^3 - 3p^2q - p^3 &= 0 \\ \therefore q^3 &= p(3pq - p^2) \end{aligned}$$

よって q^3 は p で割り切れる。 p と q が互いに素であることから、 q は p で割り切れることになるが、 $p \neq 1$ かつ p と q が互いに素であることに矛盾する。したがって α は整数である。 ■

この補題と、 $y = f(x)$ のグラフを調べることにより、次が証明できる。

命題 3 (再掲)

多項式 $f(x)$ は、有理数の根をもたない。

証明： 補題 2 より、多項式 $f(x)$ が整数の根をもたないことを示せばよい。そのために、 $y = f(x)$ の増減表とグラフの概形を調べる。増減表を調べると、次のようになる。

x	...	-1	...	1	...
y'	+	0	-	0	+
y	↗	1	↘	-3	↗

よってグラフの概形は次のようになる。

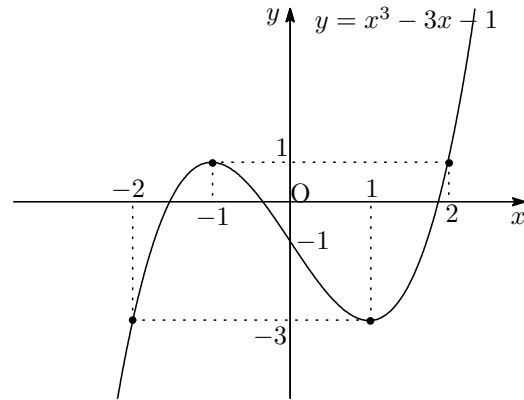


図 5 : $y = x^3 - 3x - 1$

よって増減表とグラフより、多項式 $f(x)$ は整数の根をもたないことがわかる。したがって、補題 2 より $f(x)$ は有理数の根をもたない。 ■

2.4 命題 4 の証明

命題 4 を証明するために、いくつか準備をする。新しい言葉を定義する。 Q_n の元 $\alpha = a + b\sqrt{c_n}$ に対し、 α の (Q_n における) 共役 $\bar{\alpha}$ を $a - b\sqrt{c_n}$ で定義する。このとき、次の基本的な性質が成り立つ。

補題 3 (共役の性質)

Q_n ($n \geq 1$) で考える。 Q_n の元 α, β に対し、

- (1) $\overline{\alpha + \beta} = \bar{\alpha} + \bar{\beta}$
- (2) $\overline{\alpha - \beta} = \bar{\alpha} - \bar{\beta}$
- (3) $\overline{\alpha \cdot \beta} = \bar{\alpha} \cdot \bar{\beta}$
- (4) $\overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)} = \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}}$
- (5) Q_n における Q_{n-1} の元 γ に対しては $\bar{\gamma} = \gamma$

証明： α, β は Q_n の元なので、 $\alpha = a_1 + b_1\sqrt{c_n}$, $\beta = a_2 + b_2\sqrt{c_n}$ ($a_1, a_2, b_1, b_2, c_n \in Q_{n-1}$ だが $\sqrt{c_n} \notin Q_{n-1}$) と表せられる。

(1) について：

$$\begin{aligned} \overline{\alpha + \beta} &= \overline{(a_1 + b_1\sqrt{c_n}) + (a_2 + b_2\sqrt{c_n})} \\ &= \overline{(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\sqrt{c_n}} \\ &= (a_1 + a_2) - (b_1 + b_2)\sqrt{c_n} \\ &= (a_1 - b_1\sqrt{c_n}) + (a_2 - b_2\sqrt{c_n}) \\ &= \overline{a_1 + b_1\sqrt{c_n}} + \overline{a_2 + b_2\sqrt{c_n}} \\ &= \bar{\alpha} + \bar{\beta} \end{aligned}$$

⁶整数 p, q が互いに素であるとは、 p と q の最大公約数が 1 であることをいう。

(2) も同様に示せる.

(3) について :

$$\begin{aligned}\overline{\alpha} \cdot \beta &= \overline{(a_1 + b_1\sqrt{c_n})} \cdot (a_2 + b_2\sqrt{c_n}) \\ &= \overline{(a_1a_2 + b_1b_2c_n)} + (a_1b_2 + b_1a_2)\sqrt{c_n} \\ &= (a_1a_2 + b_1b_2c_n) - (a_1b_2 + b_1a_2)\sqrt{c_n} \\ &= (a_1 - b_1\sqrt{c_n}) \cdot (a_2 - b_2\sqrt{c_n}) \\ &= \left(\overline{a_1 + b_1\sqrt{c_n}} \right) \cdot \left(\overline{a_2 + b_2\sqrt{c_n}} \right) \\ &= \overline{\alpha} \cdot \beta\end{aligned}$$

(4) も同様に示せる.

(5) Q_{n-1} の要素 γ は $\sqrt{c_n}$ をもちえないので, (Q_n における) 共役をとっても変わらない. ■

3 次方程式における解と係数について復習しておく.

補題 4 (3 次方程式の解と係数の関係)

3 次方程式 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ とその解 α, β, γ は次の関係をもつ :

$$\begin{aligned}\alpha + \beta + \gamma &= -\frac{b}{a} \\ \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha &= \frac{c}{a} \\ \alpha\beta\gamma &= -\frac{d}{a}\end{aligned}$$

証明 : α, β, γ が $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ の解であることから,

$$\begin{aligned}ax^3 + bx^2 + cx + d &= a(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) \\ &= ax^3 - a(\alpha + \beta + \gamma)x^2 + a(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)x - a\alpha\beta\gamma\end{aligned}$$

両辺の係数を比較すると, 所望の等式が得られる. ■

これらの補題の準備のもと, 命題 4 を証明する.

命題 4 (再掲)

$n \geq 1$ を自然数とする. 「 $\alpha \in Q_n$ かつ $f(\alpha) = 0$ となる α が存在する」 \Rightarrow 「 $\beta \in Q_{n-1}$ かつ $f(\beta) = 0$ となる β が存在する」.

証明 : Q_n の元 α が $f(x) = 0$ の解だとする. まず α の共役 $\overline{\alpha}$ もまた $f(x) = 0$ の解となることを示す. α は $f(x) = 0$ の解なので, $\alpha^3 - 3\alpha - 1 = 0$ となる. 両辺の共役をとり, 補題 3 を用いて計算すると

$$\begin{aligned}\overline{\alpha^3 - 3\alpha - 1} = \overline{0} &\Leftrightarrow \overline{\alpha^3 - 3\alpha - 1} = \overline{0} \\ &\Leftrightarrow (\overline{\alpha})^3 - 3\overline{\alpha} - 1 = 0\end{aligned}$$

したがって α の共役 $\overline{\alpha}$ も $f(x) = 0$ の解となる. また, $\overline{\alpha}$ は α の共役なので, Q_n の元である.

今, $f(x) = x^3 - 3x - 1 = 0$ は 3 次方程式なので, $\alpha, \overline{\alpha}$ 以外にもう 1 つ解をもつ. それを β とする. 補題 4 の解と係数の関係より,

$$\alpha + \overline{\alpha} + \beta = 0$$

となる. よって $\beta = -(\alpha + \overline{\alpha})$ となる. ここで, α は Q_n の元だったので, $\alpha = a + b\sqrt{c}$ (a, b, c は Q_{n-1} の元) と表せられる. よって,

$$\beta = -(\alpha + \overline{\alpha}) = -(a + b\sqrt{c} + a - b\sqrt{c}) = -2a$$

となるので, β は Q_{n-1} の元である. したがってこの β は $f(x) = 0$ の解で, かつ Q_{n-1} の元なので, この命題が証明された. ■

3 角の三等分の「作図」可能性

本節では, 通常の間尺以外の方法による角の三等分の作図方法を紹介する. まず, 使用する道具は定規とコンパスだが, 通常と異なる定規の使用法を用いた作図法を紹介する.

3.1 長さを記録できる定規による作図

ここでは, 定規の通常の使用法を超えて, 次のように使用できるものとする.

- (i) 与えられた 2 点に定規を合わせ, 定規に 2 点の位置の印をつけられる. つまり 2 点間の長さを定規に記録できる.

$\angle AOB \neq 0$ である 3 点 A, O, B が与えられたとする. $0 \leq \angle AOB \leq \frac{\pi}{2}$ の場合のみを考えても一般性は失われない. 実際, もし $\frac{\pi}{2} \leq \angle AOB \leq \pi$ のときは, 上の場合と同様な手順で角の三等分が作図可能である. また, $\pi \leq \angle AOB \leq 2\pi$ のときは, 上記の方法により $\angle AOB - \pi$ の三等分を作図しておき, その三等分の角度に $\frac{\pi}{3}$ (もちろんこれは通常の意味で作図可能である) を加えた角を線分 OA からとればよい.

角 AOB の三等分の手順は以下である. なお, 通常と異なる作図法は (iii) と (iv) である.

- (i) 点 A を通り, 線分 OB に平行な直線 l をひく.
(ii) 点 A を中心とする半径 AO の円 α を描く.

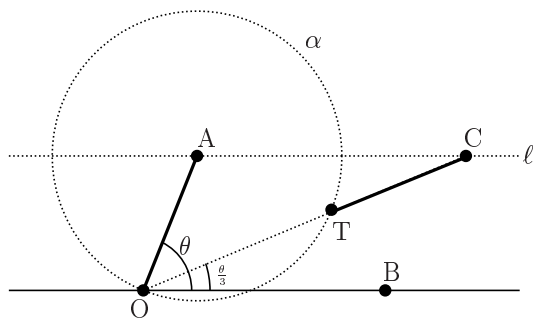


図 6: 目盛付きの定規による作図

- (iii) 定規の使用法 (†) を用いて, AO の長さを定規に記録する.
- (iv) AO の長さが記録された定規を用いて, 直線 l 上の点 C を, 線分 OC と円 α の交点を T とするとき $CT=OA$ となるように, 作図する.

このとき, $\angle BOT$ が $\angle AOB$ の三等分になっている. 実際, 次のようにこのことが示せる. AC と OB が平行なので, 錯角より, $\angle BOT = \angle ACT$. また, $TC=TA$ より $\angle ACT = \angle CAT$. よって $\angle OTA = \angle CAT + \angle ACT = 2\angle ACT = 2\angle BOT$. また, $AT=AO$ より $\angle TOA = \angle OTA$. よって $\angle TOA = 2\angle BOT$ となる. よって $\angle BOT$ は $\angle AOB$ の三等分である.

3.2 折り紙による作図

ここでは, 折り紙を用いた作図による角の三等分可能性を示したい. まず, 3.2.1 節にて折り紙による作図について述べる. 続いて 3.2.2 節で角の三等分の作図方法について述べる.

3.2.1 折り紙による作図の手順

折り紙の作図の手順は以下の $O1 \sim O5$ の 5 つからなる:

- $O1$ 平行でない 2 直線 l_0, l_1 が与えられたとき, これらの交点をとる.
- $O2$ 2 点 P, Q が与えられたとき, 直線 PQ を折る.
- $O3$ 点 P と直線 l が与えられたとき, l の垂線で点 P を通る直線を折る.
- $O4$ 点 P, Q と直線 l が与えられたとき, P が l に, Q が Q に重なるように折る.

- $O5$ 点 P, Q と直線 l_0, l_1 が与えられたとき, P が l_0 に, Q が l_1 に重なるように折る.

次に, 上記折り紙の手順の有限回の適用によって, どのような図形が作図できるのかを考えていきたい.

補題 5 (自然数倍の作図)

2 点 A, B が与えられたとき, 自然数 n に対し, 線分 AB の延長上の点 P で, $|AP| = n|AB|$ となる点を作図できる.

証明: 2 倍を作図できれば, それ以外は同様に作図可能である.

手順 $O2$ により, 直線 AB を折る.

手順 $O3$ により, 点 B を通り直線 AB に垂直な直線 l_1 を折る.

手順 $O4$ により, A が l_1 に, B が B に重なるように折ってできる直線を l_2 とする.

手順 $O1$ により, l_1 と l_2 の交点を C とする.

手順 $O4$ により, C が直線 AB に, B が B に重なるように折ってできる直線を l_3 とする.

手順 $O1$ により, 直線 AB と直線 l_3 の交点を P とすると, この点 P が求めたい点である. すなわち, $|AP| = 2|AB|$ となる. ■

補題 6 (平行線を折る)

一直線上にはない与えられた 3 点 A, B, C に対し, 点 C を通り直線 AB に平行な直線を折ることができる.

証明: 手順 $O3$ により, 点 C を通り直線 AB に垂直な直線 l_1 を折る.

手順 $O3$ により, 点 C を通り直線 l_1 に垂直な直線を折ると, この直線が求めたいものである. ■

補題 7 (線分の平行移動)

線分 AB と, 直線 l 上の点 O が与えられたとき, $OP=AB$ となる点 P を l 上にとることができる.

場合分けで証明する.

(i) $O=A$ のとき.

手順 $O4$ により, B が l に, O が O に重なるように折ってできる直線を l' とする.

手順 $O3$ により, B を通り l' の垂線 l'' を折る.

手順 $O1$ により, l'' と l との交点を P とすると, $OP=AB$ となる.

(ii) $O \neq A$ のとき.

・ 3 点 O, A, B が一直線上にない場合:

手順 O2 により, 直線 OA を折る.

補題 6 により, 点 B を通り直線 OA に平行な直線 l_1 を折る.

手順 O2 により, 直線 AB を折る.

補題 6 により, 点 O を通り直線 AB に平行な直線 l_2 を折る.

手順 1 により, l_1 と l_2 の交点を C とする.

このとき, 四角形 OABC は平行四辺形なので, $AB=OC$ となる. したがって (i) の場合に還元された.

・ 3 点 O, A, B が一直線上にある場合 :

手順 O2 により, 直線 OB を折る.

手順 O3 により, A を通り直線 OB に垂直な直線 l_3 を折る.

手順 O4 により, B が l_3 に, A が A に重なるように折つてできる直線を l_4 とする.

手順 O3 により, B を通り l_4 に垂直な直線を l_5 とする.

手順 O1 により, l_3 と l_5 の交点を B' とする.

このとき, $AB=AB'$ となる. また, 3 点 O, A, B' は一直線上に無いので, 上の, 3 点が一直線上に無い場合に還元された. ■

以上の補題を用いることにより, 与えられた線分の長さから折り紙で作図できる数は四則演算について閉じていることがわかる. すなわち, 与えられた線分の長さどうしを足した長さ, およびかけた長さの線分を, 定規とコンパスによるその作図と同じような発想で, 折り紙を用いて作図できる. したがって特に, 長さ 1 が与えられたとき, 折り紙作図によってすべての有理数を作図することができる. 本節では以下, 線分の長さについて触れるので, 長さ 1 となる線分 OA があらかじめ与えられているとする.

3.2.2 折り紙による角の三等分

まず, 折り紙作図において次のことを確認しておく.

命題 5

長さが $|a|$ の線分を作図できることと, 傾きが a の直線が作図できることは同値である.

証明 : 長さが $|a|$ の線分が与えられたとする. A を通り OA に垂直な直線 l を折る. l 上に, a の正負に合わせて, 補題 7 を用いて, $AB=|a|$ となる点 B をとると, 直線 OB の傾きが a となる.

逆に, 傾きが a の直線 l_1 が与えられたとする. 補題 6 により, O を通り l_1 に平行な直線を折る. A を通る

OA に垂直な直線 l_2 を折る. l_1 と l_2 の交点を B とすると, $AB=a$ である. ■

次に, 手順 O4 と O5 の幾何学的な意味を考察しておく. O4 と O5 を再掲する.

O4 点 P, Q と直線 l が与えられたとき, P が l に, Q が Q に重なるように折る.

O5 点 P, Q と直線 l_0, l_1 が与えられたとき, P が l_0 に, Q が l_1 に重なるように折る.

O4 は, 点 P を焦点, 直線 l を準線とする放物線の接線で, 点 Q を通る直線を折ることを意味する.

O5 は, 点 P を焦点, 直線 l_0 を準線とする放物線, および点 Q を焦点, 直線 l_1 を準線とする放物線の共通接線の 1 つを折ることを意味する.

O4 のみを確認すればよい. O5 は O4 を 2 回適用することにより, 上の意味を確認できる.

ここでは点 $P(0, a)$ を焦点, 直線 $l: y = -a$ を準線とする放物線のみを考える. この放物線を α とする. これ以外の場合は適当に回転移動および平行移動することにより, 上の場合に帰着される.

点 P が準線 l に, 点 Q がそれ自身に重なるように折つてできる直線を l' , 点 P の行先を P' とする⁷. この l' が放物線 α の接線になることを示せばよい. 直線 l' は線分 PP' の垂直二等分線である. 点 P' の座標を $(b, -a)$ とすると, 直線 PP' の傾きは $-\frac{2a}{b}$ である. よって l' の傾きは $\frac{b}{2a}$ となる. また, 点 P と P' の中点は $(-\frac{b}{2}, 0)$ なので, l' の方程式は $y = \frac{b}{2a}(x - \frac{b}{2})$ すなわち, $y = \frac{b}{2a}x - \frac{b^2}{4a}$ となる. ここで放物線 α との連立方程式を考える :

$$\begin{cases} y = \frac{b}{2a}x - \frac{b^2}{4a} \\ y = \frac{1}{4a}x^2 \end{cases}$$

下式を上式に代入して整理すると, $(x-b)^2 = 0$ となる. よって直線 l_1 は放物線 α の $x = b$ に対応する点における接線となっている. したがって O4 の幾何学的な意味を確認できた.

次に, 角の三等分を折り紙によって作図する. 一直線上にない 3 点を B, C, D とする. 角 $\angle BCD$ の大きさを θ とする. $\theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) とする⁸. このとき, 2.2 節の考察より, $q = -2 \cos \theta$ ($\neq 0$) とおくと, 3 次方程式

$$x^3 - 3x + q = 0 \quad (\dagger)$$

⁷点 Q を通り l' に垂直な直線と l の交点を P' とすればよい.

⁸ $\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) のときは $\frac{\pi}{6}$ が作図できることから, 角の三等分の作図は容易である.

の正の実数解を作図できれば、 $\angle BCD$ の三等分を作図できることになる。ただし角 θ が与えられていることから、 $2\cos\theta$ も作図可能であることに注意する。

ここで、次の 2 つの放物線を考える。

- 点 $F_0\left(\frac{q}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ を焦点、直線 $l_0: x = -\frac{q}{2}$ を準線とする放物線 $(y + \frac{3}{2})^2 = 2qx \cdots (\clubsuit)$.
- 点 $F_1\left(0, \frac{1}{2}\right)$ を焦点、直線 $l_1: y = -\frac{1}{2}$ を準線とする放物線 $x^2 = 2y \cdots (\spadesuit)$.

以下で、この 2 つの放物線の共通接線 η の傾きが、方程式 (†) の解になることを証明する。共通接線 η の方程式を $y = \beta x + \gamma$ とおく。

直線 η は放物線 (\spadesuit) と接するので、 $y = \beta x + \gamma$ を (\spadesuit) に代入して得られる x についての 2 次方程式 $x^2 - 2\beta x - 2\gamma = 0$ は重解をもつ。よって判別式は $D/4 = \beta^2 + 2\gamma = 0$ すなわち $\gamma = -\frac{\beta^2}{2}$ となる。

また、直線 η は放物線 (\clubsuit) と接する。 $y = \beta x + \gamma$ を (\clubsuit) に代入すると、

$$\left(\beta x + \gamma + \frac{3}{2}\right)^2 = 2qx$$

$$\therefore \beta^2 x^2 + 2\left\{\beta\left(\gamma + \frac{3}{2}\right) - q\right\}x + \left(\gamma + \frac{3}{2}\right)^2 = 0$$

この 2 次方程式の判別式 $D/4$ が 0 になるので、

$$\beta^2\left(\gamma + \frac{3}{2}\right)^2 - 2\beta q\left(\gamma + \frac{3}{2}\right) + q^2 - \beta^2\left(\gamma + \frac{3}{2}\right)^2 = 0$$

$$\therefore q\left\{-2\beta\left(\gamma + \frac{3}{2}\right) + q\right\} = 0$$

$q \neq 0$ より、

$$-2\beta\left(\gamma + \frac{3}{2}\right) + q = 0$$

となる。ところで $\gamma = -\frac{\beta^2}{2}$ だったので、上式に代入すると、

$$-2\beta\left(-\frac{\beta^2}{2} + \frac{3}{2}\right) + q = 0$$

となる。これを整理すると、

$$\beta^3 - 3\beta + q = 0$$

となる。よって β 、すなわち共通接線 η の傾きは、(†) の解の 1 つになる。

ところで、2 つの放物線 (\clubsuit) と (\spadesuit) の焦点および準線は、折り紙作図において有理数および $q = -2\cos\theta$ が作図可能であることから、作図可能である。したがって上の結論により、折り紙によって角の三等分を作図することができる。

3.3 放物線作図機による作図

ここでは、与えられた点と直線をそれぞれ焦点と準線とする放物線を描くことのできる「放物線作図機」を用いて、角の三等分の作図可能性を示す。実際に放物線を描く方法については、追補で述べる。

与えられた角 $\angle AOB$ を θ ($0 \leq \theta \leq \pi$) とする。適当に座標を定めることにより $\cos\theta$ が負の場合も含め、 $\cos\theta$ が作図可能であることと、なす角が θ である 2 直線が作図可能であることは同値である。したがって今、 $\cos\theta$ が作図可能であるとしてよい。3 倍角の公式から、

$$\cos\theta = 4\cos^3\frac{\theta}{3} - 3\cos\frac{\theta}{3}$$

$y = \cos\frac{\theta}{3}$ とおき、両辺を 2 倍して整理すると、

$$8y^3 - 6y - 2\cos\theta = 0$$

となる。さらに、 $x = 2y$ とおくと、

$$x^3 - 3x - 2\cos\theta = 0$$

となる。この正の実数解を作図できれば、角 θ の三等分の作図も可能であることが示せる。ここで、 $2\cos\theta = \alpha$ とおく。今、有理数が作図可能であることから、点 $F_1\left(0, \frac{1}{4}\right)$ と直線 $l_1: y = -\frac{1}{4}$ も作図可能である。また、 α も作図可能であることから、点 $F_2\left(\frac{\alpha^2-9}{4\alpha}, \frac{3}{2}\right)$ と直線 $l_2: x = -\frac{\alpha^2+9}{4\alpha}$ も作図可能である。このとき、放物線作図機を用いると、点 F_1 を焦点、直線 l_1 を準線とするの放物線 $y = x^2$ と、点 F_2 を焦点、直線 l_2 を準線とする放物線 $x = \frac{y^2-3y}{\alpha}$ を作図できる⁹ (図参照)。このとき、この 2 つの放物線の交点 (4 つある) のうちその x 座標が正である点の x 座標の値が $2\cos\frac{\theta}{3}$ となる。したがってこの長さを半分にするにより、欲しい長さ $\cos\frac{\theta}{3}$ を得る。

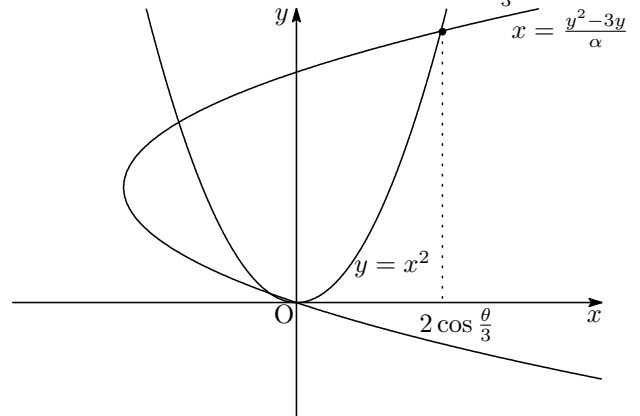


図 7: 放物線作図機による角の三等分

⁹この放物線は、焦点を $(\frac{\alpha}{4}, 0)$ 、準線を $x = -\frac{\alpha}{4}$ とする放物線 $x = \frac{1}{\alpha}y^2$ を、 x 軸方向に $-\frac{9}{4\alpha}$ 、 y 軸方向に $\frac{3}{2}$ だけ平行移動して得られる放物線である。

4 代数方程式の解の作図可能性

本節では、前節で考察した折り紙作図と放物線作図機を用いた作図による代数方程式の解の作図可能性について、いくつかの結果を紹介する。作図可能な係数からなる代数方程式の解を作図することができるかを考える。

4.1 折り紙と代数方程式

3.2 節で考察したように、折り紙作図では角の三等分を作図することができる。角の三等分においては、 $x^3 - 3x - 2\cos\theta = 0$ という、特別な3次方程式の解の作図可能性が問題であった。本節では、一般の3次方程式の解を折り紙によって作図できることを示す。定規とコンパスによる通常作図では、2 節で考察したように、一般の3次方程式の解を作図することはできない。より一般に、4次方程式の解も折り紙で作図できることが知られている。しかし5次以上の一般の方程式の解は折り紙で作図できないことも知られている。

命題

3次方程式の解は折り紙作図可能である。

証明: チルンハウス変換により、3次方程式における2次の項はあらかじめ消去されているとしてよい。また、最高次の係数で全体を割ることにより、最高次の係数はあらかじめ1であるとしてよい。したがって次の形の方程式を考える。

$$x^3 + px + q = 0 \cdots (\dagger)$$

ただし p, q は折り紙作図可能な数とする。

ここで、次の2つの放物線を考える。

- 点 $F_0\left(\frac{q}{2}, \frac{p}{2}\right)$ を焦点、直線 $l_0: x = -\frac{q}{2}$ を準線とする放物線 $(y - \frac{p}{2})^2 = 2qx \cdots (\blacklozenge)$ 。
- 点 $F_1\left(0, \frac{1}{2}\right)$ を焦点、直線 $l_1: y = -\frac{1}{2}$ を準線とする放物線 $x^2 = 2y \cdots (\blackstar)$ 。

このとき、 p, q が作図可能であることから、それぞれの焦点および準線も作図可能である。したがって手順 O5 から、この二つの放物線の共通接線を折ることができる。この共通接線を $y = ax + b$ とすると、この直線の傾きが、方程式 (†) の解となることを示す。 $y = ax + b$ を (★) に代入して整理すると、 $x^2 - 2ax - 2b = 0$ となる。直線 $y = ax + b$ と放物線 (★) が接することから、 $D/4 = a^2 + 2b = 0$ となる。よって $b = -\frac{a^2}{2}$ となる。

また、直線 $y = ax + b$ は放物線 (◆) と接するので、 $y = ax + b$ を (◆) に代入すると、

$$\begin{aligned} \left(ax + b - \frac{p}{2}\right)^2 &= 2qx \\ \therefore a^2x^2 + \left\{2a\left(b - \frac{p}{2}\right) - q\right\}x + \left(b - \frac{p}{2}\right)^2 &= 0 \end{aligned}$$

この2次方程式の判別式 $D/4$ が0になるので、 $D/4$ を計算して整理すると、

$$q^2 - 2abq + apq = 0$$

となる。ところで $b = -\frac{a^2}{2}$ だったので、上式に代入して整理すると、

$$a^3 + pa + q = 0$$

となる。よって a 、すなわち共通接線 $y = ax + b$ の傾きは、3次方程式 $x^3 + px + q = 0$ の解となる。■

4.2 放物線作図機と代数方程式

本節では、放物線作図機を用いて、一般の4次方程式の解を作図できることを証明する。さらに、放物線 $y = x^2$ さえ描かれていれば、一般の3次方程式の解を作図することも証明する。

まず、一般の3次方程式を考える。チルンハウス変換および最高次の係数で割ることにより、3次方程式

$$x^3 + ax + b = 0 \cdots (\ddagger)$$

の実数解の作図可能性について考えれば十分である。そのために、2つの放物線

$$y = -\frac{a}{b}x^2, \quad x = -\frac{b}{a^2}y^2 + y$$

を作図する。これらはそれぞれ、

- 点 $\left(0, -\frac{b}{4a}\right)$ を焦点、直線 $y = \frac{b}{4a}$ を準線とする放物線、
- 点 $\left(-\frac{a^2}{4b} + \frac{b}{4a}, \frac{1}{2}\right)$ を焦点、直線 $x = \frac{a^2}{4b} + \frac{b}{4a^2}$ を準線とする放物線

である。したがってこれら焦点および準線は作図可能なので、放物線作図機を用いて、先の2つの放物線も作図可能である。これら放物線の交点は、計算すると、方程式 $x(x^3 + ax + b) = 0$ の解となる。よって特に方程式 (†) の実数解は、放物線作図機を用いれば作図可能である。

次に、一般の4次方程式を考える。その際チルンハウス変換により、3次の項はあらかじめ消去されていると

考えてよい。また最高次の係数は 1 であるとしてよい。
したがって 4 次方程式

$$x^4 + ax^2 + bx + c = 0 \cdots (\dagger\dagger)$$

の実数解の作図可能性について考えれば十分である。そのために、2つの放物線

$$y = x^2, \quad x = -\frac{1}{b}y^2 - \frac{a}{b}y - \frac{c}{b}$$

を作図する。これらはそれぞれ、

- 点 $(0, \frac{1}{4})$ を焦点、直線 $y = -\frac{1}{4}$ を準線とする放物線、
- 点 $(-\frac{a^2+b^2+4c}{4b}, -\frac{a}{2})$ を焦点、直線 $x = \frac{b^2-a^2-4c}{4b}$ を準線とする放物線

である。したがってこれら焦点および準線は作図可能なので、放物線作図機を用いて、先の2つの放物線も作図可能である。これらの交点は、方程式 $x^4 + ax^2 + bx + c = 0$ の解となるので、この実数解は、放物線作図機を用いれば作図可能である。

ここでは、放物線作図機にて放物線 $y = x^2$ さえ作図可能であれば、3次方程式 $x^3 + ax + b = 0$ の実数解は作図可能であることを示す。そのために、放物線 $y = x^2$ と円 $(x + \frac{b}{2})^2 + (y + \frac{a-1}{2})^2 = (\frac{b}{2})^2 + (\frac{a-1}{2})^2$ を作図する。これらの交点は、方程式 $x(x^3 + ax + b) = 0$ の解となる。したがって、何らかの道具で放物線 $y = x^2$ さえ作図できれば、あとは定規とコンパスのみで任意の3次方程式の実数解を作図できることがわかった。

5 課題

本論文の3節では、角の三等分を作図するために、通常の作図方法を超えた3種類の作図方法を考えた。「目盛のついた定規による作図」、「折り紙による作図」、「放物線作図機による作図」である。そこで次のように問うことができる。これらの作図方法で、表現力の最も高い作図方法はどれであろうか？すなわち、これらの作図方法において、作図可能な図形が最も多いのはどれであろうか？以下、知られている事実を述べる。

まず、これら3種類の作図方法では角の三等分を作図できることから、通常の作図方法より表現力が真に高いことがわかる。

次に折り紙作図と通常の関係性を述べる。折り紙作図では5つの手順 (O1~O5) が認められている。折り紙作図を制限した、O1~O4 のみによる作図と通常の作図は

表現力が等しいことが知られている。すなわち、O1~O4 の折り紙作図で作図可能な図形は、通常の作図で作図可能であり、またこの逆も成り立つ¹⁰。このことから、角の三等分を作図する上では、O5 が本質的に必要であることがわかる。

最後に、今後の課題を述べる。

課題 1. 各種作図方法を公理化し、それら公理体系の強さを比較する。

課題 2. 放物線作図機を考えたが、それ以外の2次曲線作図機を用いた場合の作図の表現力はどれくらい強くなるのかを調べる

参考文献

- [1] ロベルト・ゲレットシュレーガー 著 (深川 英俊 訳), 『折紙の数学 (ユークリッドの作図法を超えて)』, 森北出版株式会社, 2002.

¹⁰折り紙作図で、円周上の有限個の点を描くことはできるが、円そのものを描くことはできない。しかしながら、通常の作図で得られる点を折り紙で作図するには、O1~O4 で十分であることが分かる。実際、3.2.1 節で考察したように、O1~O4 のみで四則演算が可能である。また、ルートをとる操作も、少し考えると可能であることがわかるからである。