

数学的態度について（2）～教養と数学的態度～

Mathematical attitude (2) : Liberal arts and mathematical attitude

堀畑 佳宏**
Yoshihiro HORIHATA

概要

本稿では、「教養」（リベラルアーツ）の根幹と考えられる「抽象化」についての考察を記述する。抽象化はどのような観点で行うかが大切となる。そのようなものとして、「仮説」が積極的な役割を果たすことを述べる。さらに、仮説こそが事実を作り出す（切り出す）という議論を提示する。

1. 基礎 1 : 抽象化と同一視について

「**教養**」について、高専学会の研究会での発表およびその資料（参考文献[1]）で議論した。すなわち、「**抽象化能力**」は「教養」を構成する重要な要素である、と。対象を抽象化するとは、その対象のいくつかの性質に着目する／その対象の性質を捨象する行為である。抽象化することで、一見異なる対象同士の共通点を見出すことができる。また抽象化した性質をもつものとして“**同一視**”（異なる対象を「同じ」ものとして扱うこと）も可能となる。例えばベクトルは、「矢印」のもつ諸性質を抽象化し（矢印の位置、色、形などの諸性質を捨象し）、「向き」と「大きさ」のみに着目する。この二者が同じである矢印を「同じ」ものとして同一視する（仮に、場所がどこであっても、色が何色であっても、形がとがっていたり丸みを帯びていても・・・）。このことによって例えば、幾何的な問題を“統一”的に解くことができる点に、ベクトルを考える、そして抽象化することの、恩恵がある。

“同一視”は、抽象化による恩恵の中でも特に重要な概念であると言える。上記ベクトルの例では少々縁遠さを感じるかもしれないが、身近なところにも“同一視”を見出すことができる。そもそも言葉を使うこと自体に“同一視”が行われている。例えば対象を名指す、あるいは対象に名前を与えることは、対象を認識する上でも、また会話をする上でも、根源的な行為である。ところが世には全く同じものは存在しない。よってこの状況のままでは、全てに異なる名前（固有名詞）を与えなければならず、従ってその行為は互いに関係付かず、意味をなさない。「名指す」という行為は、（意識的に、あるいは無意識的に）“同一視”を通じることで初めてなせる業な

のである。例えば「りんご」にしても、全く同じりんごは存在しない。形が異なったり、色が違ったり、香りが違ったり、と。従って、認識行為の基本的な部分においても、“同一視”は行われており、身近な存在と言える。

この“同一視”を積極的に行って発展してきた面がある学問の一つに、数学がある。数学では例えば、数えるという行為を抽象化し、対象間に全単射がある場合にこれら二者の「個数²」は同じである、と考える。対象が有限の場合は、数えるという行為について、上記考え方で問題なく説明がつく。さらに、数えるという行為を上記のように抽象化したおかげで、対象が無限の場合においても、「数える」という行為が可能となる（二者の濃度を比較するという意味で）。つまり抽象化のお陰で、有限から無限へ飛躍が可能となったと言える。その結果例えば、自然数全体の集合の濃度と整数全体の集合の濃度は同じであると言える³。さらに有理数全体の集合の濃度も、これらと同じになる⁴。従ってこれらの集合は、濃度に関しては“同一視”できる。しかしながら、実数全体の集合の濃度は、先の濃度たちよりも真に大きくなることが知

¹ 全射かつ単射のことをいう。つまり、「数え漏れが無いこと」と「ダブルカウントが無いこと」をみたま対応付けである。日常における「数える」という行為の本質をみると、対象の集合から自然数の部分集合への全単射を作る行為であると言える。つまり対象に順に 1, 2, 3, ... と自然数を割り振ることである。

² 集合が無限の場合も含めて一般に、集合の要素の“個数”を「濃度」と呼ぶ。

³ 自然数の偶数には正の整数を、奇数には負の整数を、順に対応させる全単射を作ればよい。

⁴ 有理数は、「整数÷自然数」と書けるので、少し工夫すれば自然数全体の集合から有理数全体の集合への全単射が作れる。

* 原稿受理 令和 3 年 1 月 15 日

** 教養教育科・数学

られている⁵。そこで、これら 2 つの濃度の間にくる濃度を持つ集合が存在するかどうかが問題となる⁶。(素朴)集合論を創設したゲオルグ・カントールは、そのような集合を見つけられなかったため、「自然数の濃度の“次の”濃度は実数の濃度である⁷」という仮説をたてた。この仮説は連続体仮説と呼ばれている。数学基礎論の一分野である公理的集合論において次のことが知られている。すなわち、現代の数学の殆どを展開できる集合論の公理系 ZFC においては、連続体仮説を証明できない、かつその否定も証明できない、ということが証明されている。つまり連続体仮説は ZFC から決定不能(真とも偽とも言えない)である⁸。これらの数学的成果は、集合の濃度(のみ)に着目するという“抽象化”がまず土台にあった上で、得ることのできる結果と言える。

他にも、代数学における“同型写像”や、数学基礎論における“公理系どうしの翻訳”も“同一視”と言える。また筆者の専門分野でもある数学基礎論における「逆数学⁹」においても、諸定理をその証明の複雑さで階層分けし、同じ階層に“分類”された定理はその複雑さの意味で同一視できる。これらは、ある構造に着目した上での“同一視”と言え、そして対象に対する(さらには世界に対する)重要な“見方”にもなっている基本的な概念である。特に、最後に挙げた逆数学における“分類”も、「抽象化」によってなせる業である。濃度の例でも、濃度の大小に応じて各集合を分類している、とも言える。

視野を広げれば、“同一視”は上記の如く、学問の始まりに関与していると言える。そして同一視の仕方の違いが、諸学問の違いの基となる、とも言える。

2. 基礎 2: 抽象化と仮説について

次に、“同一視”を可能にし、さらに豊かな思考を可能にしてくれる“抽象化”について考察する。一般に、ある対象は「性質」を、顕在的にもそして潜在的にも、無数にもつ。従って、対象を固定したとしても、その“抽

象化の仕方”は、無数に存在する。ここでは、“抽象化”の行為が、行為主の“仮説”に深くかかわる場合があることを考察していく。

簡単な抽象化としては例えば、上でも見たように対象の個数だけに注目する、があった。この観点では、3 つのりんご、3 本のペン、3 枚の紙、などは同一視され¹⁰、「個数は 3」というように抽象化される。「りんご」からも例えば「赤い」、「丸い」、「甘い」など数々の抽象化が可能である。また「赤い」ものとして、「太陽」、「紅葉した葉」、「郵便ポスト」、などを挙げられる、すなわち分類できる。これらの抽象化による分類は、対象がもつ「(顕在的な)性質による」分類と言える。

では次のような例はどうだろうか。山の中でのブッシュクラフトやサバイバルで「使える」ものという観点で対象を見てみよう。例えば「木の枝」であれば燃やす燃料として、ペグとして、また加工すれば箸やスプーンとして使える。「松ぼっくり」や「枯れ葉」は着火剤として使える。「枯れ葉」は、敷き詰めれば寝床や屋根としても使える。「太い木」は重ねれば風よけとして、タープのポールとして、燃料として使える。「つる」はロープとして使える。これらは、「サバイバルをする」という“観点”において「使える」ものとして抽象化され、一つに分類することができる¹¹。このような抽象化による分類は、「用

¹⁰ 自己言及的ではあるが、これら具体的な経験から、まさしく“抽象化”することにより、数の「3」というものが浮かび上がってくる。2 つの対象の個数の比較であれば、それぞれから 1 つずつ選び組として並べていき、いずれかに余りができればそちらの方が個数は多い、と分かる。つまり「個数の比較」だけでは、「数」という抽象概念は浮かび上がらない。そこには、“抽象化”という飛躍が必要である。

¹¹ 山や森でのブッシュクラフトでは、道具の“素材”がたくさんあるので、仮にペグやロープ、箸などの道具を持ってくるのを忘れたとしても、ナイフがあれば作ることができる。他方、整地されたキャンプ場でのキャンプの場合、自然界が提供してくれる“素材”が無いので、道具を忘れたら、その機能を埋め合わせるのは難しい。つまり山や森などの自然界は“包摂性”が強く、つまり“情報量”が多い。他方、人工的な世界であるキャンプ場では“包摂性”が弱く、つまり“情報量”が少ない。ただし、前者においては対象(例えば枝)を多面的に見る力、つまり“抽象化能力”が必要である。また、加工の“技術”も必要である。そしてこの 2 者は、人間側に強く依存した要素である。他方キャンプにおいては、その機能を埋め合わせる道具を持っていけば良く、それは対象側に依存した要素である。これら“包摂性”や“情報量”の違いについてはまた別の機会で議論したい。

⁵ カントールの対角線論法などによる。

⁶ 集合 A で、(自然数全体の集合の濃度) < (A の濃度) < (実数全体の集合の濃度) となる A が存在するかどうか。

⁷ 言い換えると、「自然数の濃度と実数の濃度の真の間にその濃度をもつ集合は存在しない」と言える。

⁸ 集合論の研究者の間では、連続体仮説の否定が正しいであろうと考えられている(参考文献[4])。

⁹ 逆数学については、『数学セミナー』2021年2月号で特集が生まれ、逆数学に関する筆者の原稿も掲載されている(参考文献[3])。

途による」分類と言える。

前者の例における「性質」は対象が顕在的にもつ概念であるが、後者の例における「用途」は人間の意図や観点¹²、つまりは“目的”によって見出される潜在的な性質と言える。言い換えれば、前者における抽象化は、認識を通じ「自ずと」現れ得るものである一方、後者における抽象化は、人間が意図をもって対象に積極的に関与することで（初めて）得られるものであると言えよう¹³。こうした、対象の（枯れ葉は集めれば寝床として使える、というような）潜在的な性質を顕わにするには、人間による（強力な）“目的”が必要なのである。このような“目的”は、広く捉えるならば「一つの世界観」とも言える。その強力な担い手が、“**仮説**”なのである。このように、前者の「対象のもつ顕在的な性質を抜き出すという抽象化」に対比し、後者の「世界観や仮説などに従った抽象化」は、その自由性や豊かさの意味において、人間にこそなせる業であり、また対象に眠っている新しい価値を発見、さらには生みだすための源泉となっている。

ここで“仮説”とは、事象に対する仮の説明である。仮説は、「帰納的な考え方」や「類推」などによって形成される。つまり事象から“飛躍”する事を意味する。その“飛躍”の妥当性を高めるために、実験や検証を繰り返す、仮説に不備がある場合は仮説を書き換える。この**書き換え可能性の担保**¹⁴が、科学の重要な姿勢であり、またその発展の原動力でもある¹⁵。仮説をもつということは、事象、さらには世界に対する仮の説明を与えると

いう意味で、「世界に対する態度」とも言える¹⁶。そして、**① 世界に対する態度が無ければ、対象がもつ潜在的性質を対象から抜き出すことができない。**また、**② 世界に対する態度が異なれば、同じ対象でも抽象化される内容が異なってくる、**のである。従って、対象から抽象化によって何らかの情報を得るには仮説が必要であり、また、得られる情報はその人のもつ仮説に依存する。もう少し広げて言えば、同じ事象や世界からどんな情報を抜き出せるかは、その人の世界観や興味に依存するという事である¹⁷。つまり人によって、また同じ人でも時と場所によって捉えられる（拾うことができる）事実は異なるということだ。

ここで ① を強調して述べれば、先の例でサバイバルの観点で見ること、木の枝にペグとしての機能を見出したように、世界に対する**態度や仮説こそが事実を作り出す（切り出す）**とは言えないだろうか¹⁸。「サバイバル」という観点が無ければ、枝をペグとして使うことは無いであろうし、そもそもペグとして使おうという発想にすら至らない。実際はペグとして使えるにも関わらず（潜在的性質）。

また ② のことから、「寛容」の精神の必要性が要請される。人によって、共同体によって、文化によって、同じ対象や世界でも多様に抽象化され得るためである。つまり、ある仮説はある事象を説明するのに十分であるとしても、それ以外の事象には無力ということが十分にあり得る。従ってより広い事象を説明するには他の仮説が本質的に必要となることがある。また同じ事象を説明するとしても、他の仮説と競合することもあり得る。従っ

¹² 対象に対する「態度」、人間のもつ「志向性」などとも言えようか。

¹³ 無論、上記二つの例を明確に区別する事は難しい。前者の場合においても「目的」が全くなければ、そもそも「個数」なる概念で抜き出すことはできないであろう。また挙げた3つの性質を抜き出すためにも、色味、形、味などの観点が必要となる。しかしながらこれらの抽象化と、後者の例における「抽象化」には差異があるように思える。少なくとも、前者の抽象化は、まず対象が在って、性質が抜き出される抽象化であり、後者の抽象化は、まず人間の意図があって、その意図に従って対象から性質が抜き出される抽象化である。これらの差異の考察については、別の機会に行いたい。

¹⁴ “自己修正的”な側面と言える。

¹⁵ 仮説がもつ、（自らの否定可能性を内部に孕みつつ）より深い説明へ飛躍するための「足場」としての役割も、重要である。ここに「発展」の原動力が含まれる。もし仮説を設けないのであれば、「足場」が得られず、さらなる高みに登るどころか、横に移動すらできない。

¹⁶ 仮説の自由さ、つまり経験に必ずしも依らずに仮説をたててもよいという視点に加え、さらに全ての事象の説明の源流は必ず仮説であるという認識の下での、世界に対する態度を“**数学的態度**”と名付けた（参考文献[2]）。数学では、証明の始まりとして認める仮説を**公理**と呼ぶ。

¹⁷ N. R. ハンソンは「観測」という行為が、観測者のもつ（あるいは背景にある）理論に依存することを、“理論負荷性”と呼んだ（参考文献[5]）。

¹⁸ 例えば宝石店で盗難があったとする。防犯カメラに映っていた客のうち「A氏が犯人」という仮説の下では、A氏にまつわる行動歴などの事実がかき集められ、「B氏が犯人」という仮説の下ではB氏に関する事実がかき集められよう。仮説が変われば、捉える事実も大いに変わってくる。さらに、仮説があって初めて、A氏やB氏の「事実」が姿を現す。この意味で、仮説が事実を「切り出す」、さらには、仮説が無ければこれら事実は認識され得なかったという意味を込めて、「仮説が事実を作り出す」と表現した。

て、このような原理的な意味においても、自らの仮説に対し常に書き換え可能性を担保しておく態度、つまり寛容の精神が必要不可欠と言える。もし自らの仮説を妄信してしまえば、見出すことのできる事実も制限され、むしろこのことは、その妄信をより強固なものとする螺旋迷宮に連れ込む力を持つ。筆者は論文[2]において、自分の言説も含めあらゆる言説を仮説として受け止める姿勢のことを、**数学的態度**と名付けた。そのような姿勢の下で初めて、仮説がより説明能力の高い仮説に書き換えられるなどの「発展」の可能性が開かれる。

3. 応用：教育との関わりについて

前節で、「世界に対する態度や仮説こそ事実を作り出す」と述べた。従って、どのような「態度」や「仮説」を持つかが重要となる。これらは主に言語によって形成される。言語の使い方、あるいは私達がその生活の殆どを過ごしている“**言語空間**”における自由な活動ができるかどうか、建設的な、また深い「仮説」を形成する上で不可欠となる¹⁹。言語空間における自由な振る舞い方、およびその型を提供するのが「教育」であると言え

¹⁹ 人類の発展の大きな原動力として、「言語の豊かさ」が挙げられる。言語でやりとりされる空間を“言語空間”と呼ぶ。私たちは確かに、歩いたり横になったりと現実の世界に生きているが、対象の認識や思考などは言語でなされるため、生活時間の殆どを言語空間に置いている、と言える。言語は、現実無比自由な扱える。例えば「大山を北に 100m 移動させる」のは実際には不可能であるが、言語上では可能である。その結果、気候にどのような影響を及ぼすか、登山にどのような影響を及ぼすか、などと仮説的に思考する事も可能となる。これらの思考に力をかけてくれる学問分野も整備されており、もし足りなければ学問を発展させればよい。このように“言語空間の”豊かさが、人類の発展の原動力と言える。しかしながら他方で、その自由さは時に負の側面も持つ。政治的にも利用される。現実と“言語空間”の決定的な違いは、前者には種々の“制限”があるのに対し、後者には人間自身が“制限”を設ける必要がある。現実においては、不可能がたくさんある。先の大山を移動させる例も然り、「自分の身長を 10cm 伸ばす」や「自分が空を飛ぶ」などはできない。しかし言語空間では容易い。そして、現在執筆中であるが、論文 [6] (2020 年 12 月 25 日に開催された「第 4 回リベラルアーツ教育研究会」の報告集)でも強調するように、そもそも「制限」が無ければ自由にもなれない。言語空間にどのような「制限」を入れるかは、人工的で人為的であり、非常に重要なことなので、論文 [6] を含め、機会を設けて議論していきたい。

る。各学問分野はそれぞれ固有の、世界に対する態度、つまり型を保有している。自分の関心事にどのような型が(修正を必要とするかもしれないが)応用できるか、その使い得る型が豊富であれば、問題を解決する力も高まる。

学問分野として確立されているいずれの土台も、長い歴史に裏打ちされたものが多い²⁰。**技術によって生活は大きく変わってきた**上、これからはさらなる加速度をもって変化していくであろう。しかしながらそれらを**受け止める人間の側はほとんど変わってない**と言える。昔も今も人間は食事をするであろうし、睡眠もする。「生きる」という根源に近い概念は殆ど変わってないと言える。そして如何に生きるか、それはつまり世界をどのように捉えるか、という意味で、これら根幹にかかわる力として「**教養**」(抽象化能力=抽象化の仕方の豊かさ)が重要となってくる。先端技術は目まぐるしく変わる。商品も日々新しい物が生まれる。それらによって自分たちの中に欲望が「作られる」。これらの欲望に盲目に従って生きることは、“自由”とは呼べないであろう。例えるなら、花や葉だけを見て、それらを追っかけることも時には必要で楽しさもある。しかし花や葉を形成する「幹」が、さらにはこれらを支える「根」が、どのような構造であるかを捉えることで、現実社会の末端で右往左往(葉から別の葉へ、あるいは花から別の花へと、非有機的な移動)することもなくなるであろう。世界にはあまりに多くの末端がありそれらは日々変化するので、これらに振り回されていたら、“暇”が無く²¹、落ち着いて思考もできない。それはつまり主体を欠き、自分を失うことである。自分は何に興味があり、何をしている時に生を感じられるのか、そんな思考の時間を過ごすためにも、余裕や余暇を持ち、自分の仮説を養成する事が、いつの時代でも重要なことと言える。

そして自己言及的に、「教養」つまり抽象化能力、抽象化するための豊富な観点、そして数学的態度は、教員にこそ必要不可欠なことであると言えよう。まさしく学生は、潜在的な力を豊かに保持している筆頭的存在である。それを明るみにし得るのが、学生に対する仮説であり態度であり、学生にとっては「文脈」や「機会」である。つまり、学生の潜在的な力を目覚めさせる「環境²²」を

²⁰ 哲学や数学ははるか紀元前から連綿と続く。

²¹ “暇”や“無駄”については、「教養」と関わるため、別の機会に議論したい。

²² 筆者は本校高専祭にて『魂の作品展』を開催している。2020 年 10 月末に行われた高専祭で 4 回目の実施である。始まりは学生からのアイディアで、ジャンルにこだわら

作ることが、教員の役割と言える。教員は、より長く生きていく存在として、そして自らの仮説の再帰的な書き換え経験²³を通じ、学生と対峙しなければならない。

参考文献

- [1] 堀畑 佳宏, 「教養と抽象化能力」, 日本高専学会・第 19 回連続シンポジウム発表原稿資料, 3 ページ, 2017 年 2 月
- [2] 堀畑 佳宏, 「数学的態度について (1) ~数学同好会の活動を通じて~」, 日本数学教育学会 高専・大学部会論文誌, 第 26 号, No.1, pp.112 ~ 114, 2020 年 3 月
- [3] 堀畑 佳宏, 「複素解析学の基礎と逆数学」, 『数学セミナー 2 月号』, 日本評論社, pp.36 ~ 39, 2021 年 2 月
- [4] 田中 一之 編, 『ゲーデルと 20 世紀の論理学 4 集合論とプラトニズム』, 東京大学出版会, 2007 年 7 月
- [5] N. R. ハンソン, 『科学的発見のパターン』, 講談社学術文庫, 1986 年 6 月
- [6] 堀畑 佳宏, 『教養と抽象化能力 (仮)』, 第 4 回リベラルアーツ教育研究交流会 (2020 年 12 月 25 日開催), 報告集【執筆中】

ず学生が作った作品を展示することから始まった。本作品展と教養との関係については、2020 年 12 月 25 日にオンラインで行われた「第 4 回リベラルアーツ教育研究交流会」にて発表し、現在、論文として執筆中である [6]。²³ 仮説の「階層化 ⇒ 修正 ⇒ 再階層化」の再帰的蓄積、つまり仮説のグラデーションを提示し、学生に潜在的な力を発揮してもらう。