第 3 回弓ヶ浜セミナー（2014 年 3 月 20 日開催）

数学における「エコ」の実践

～「逆数学」の紹介～

Practices of ecology in mathematics

堀畑 佳宏 **

Yoshihiro HORIHATA

概要

第 3 回弓ヶ浜セミナーにて、数学基礎論における一プログラムである逆数学の研究について紹介した。本論文ではまず前半で、数学基礎論の歴史の一断片を概観し、逆数学の始まりの起源を探る。さらに後半では逆数学で用いられる 2 階算術の部分体系を紹介し、著者の最近の研究を紹介する。

公理系	解析学の定理	代数学の定理	幾何学の定理
ACA_0	コーシー列の収束性，リーマンの写像定理 ボルツァノ/ワイエルシュトラスの定理	可換環の極大イデアルの存在 ベクトル空間の基底の存在	
WKL_0	ハイネ/ボレルの被覆定理，最大値の原理 連続関数の可積分性，コーシーの積分定理 **ジョルダン領域に対するリーマンの写像定理**	可換環の素イデアルの存在 代数閉包の唯一存在	ブラウアーの不動点定理 ジョルダンの閉曲線定理 **持ち上げ補題**
RCA_0	中間値の定理，平均値の定理 **多角形領域に対するリーマンの写像定理**	代数学の基本定理，代数閉包の存在 有限次元ベクトル空間の基底の存在	

1　はじめに

本論文では 2 章で、数学の一分野である数学基礎論の歴史の断片を概観し、1970 年代から研究され始めた一プログラム「逆数学」の歴史的位置づけを確認する。3 章ではまず逆数学で用いられる部分体系を紹介し、後半では複素解析学の基礎に関する逆数学の研究について著者の最近の研究を紹介する。

2　数学基礎論の歴史の断片

2.1　数学の基礎の危機

数学における基礎的な概念として**集合**がある。例えば自然数の有限個の集まり $\{1,2,3,4,5\}$ は集合、特に有限集合である。また奇数全体の集まり $\{1,3,5,7,9,\cdots\}$ も集合で、特に要素が無数に存在することから無限集合である。

このように集合を数などの「ものの集まり」と考えて体系化された理論がカントールによる**素朴集合論**である。素朴集合論は、その公理が単純で扱いやすく、またそれまでの数学を展開するための基礎理論として十分すぎるといえるほどの強さを持っている。

しかしながら、そうであるがゆえに、1900 年前後に素朴集合論でいくつかパラドクスが発見された。一般に、ある理論においてパラドクスが導かれることは非常に困ることとなる。なぜならば、パラドクスを導く理論では全ての命題が証明されてしまうからだ。

上記発見されたパラドクスのうちで、この困った現象を引き起こす要因を鮮明に表すものが**ラッセルのパラドクス**である。以下で、ラッセルのパラドクスを紹介する。その前に、いくつか記号のや概念の準備をしておく。

まず、ある対象 x が集合 A に属する、つまり x が集合 A の要素であることを、$x \in A$ で表す。そうでないことを $x \notin A$ で表す。例えば、$2 \in \{1,2,3,4,5\}$ だが $6 \notin \{1,2,3,4,5\}$ である。

次に、集合の表し方を 2 つ紹介する。1 つは**外延的記法**と呼ばれる表し方で、こちらは既に登場している。すなわち、集合の要素を直接書き並べて表す方法である。例えば、1 から 10 までの奇数全体からなる集合は、$\{1,3,5,7,9\}$ と表せられる。

一方、外延的記法には限界がある。有限集合、つまり要素の個数が有限である集合ならば、その要素を並べ挙

* 原稿受理　平成 26 年 12 月 5 日

** 教養教育科・数学

げることによって外延的記法で表すことができる。しかし無限集合、つまり要素の個数が無限である集合の場合、その要素を並べ挙げることはできない。

そこで、集合を表す 2 つめの方法として**内包的記法**を紹介する。ある集合の要素全てに共通な性質を**内包**という。言い換えれば内包とは、その集合に属するかどうかを判定するための条件と言える。その内包をみたす要素全体という形で集合を表現する方法が、内包的記法である。例えば奇数全体の集合は、

$$\{n \mid \text{ある自然数}\, m\, \text{が存在して}\, n = 2m + 1\}$$

と表せられる。ここで、集合の要素を表す記号を縦棒 " | " の左に書き、その集合の内包を縦棒の右に書いている。無限集合を表すには、内包的記法が必要である。

ここで、カントールの素朴集合論を特徴づける公理である**内包公理**を確認しておこう。内包公理とは、変数 x に関する条件 $P(x)$ が与えられたとき、この $P(x)$ をみたす x 全体からなる集合 $\{x \mid P(x)\}$ が存在することを保証する公理である。

例えば $P(x)$ として「ある自然数 m が存在して $x = 2m$ となる」とすると、内包公理より集合 $\{x \mid P(x)\}$ が存在する。よって偶数全体からなる集合の存在が、素朴集合論で導けることがわかる。このように内包公理は、直感的に集合を創造できることを保証する、非常に強力な公理になっている。

これらの準備の下、ラッセルのパラドクスを見てみよう。まず、自分自身を要素として含まない要素全体からなる集合 $\mathcal{R}$ を**ラッセル集合**という。内包的記法で表すと、$\mathcal{R} = \{x \mid x \notin x\}$ となる。ここで条件「$x \notin x$」は x に関する条件なので、内包公理よりこの条件をみたす x 全体からなる集合、すなわちラッセル集合の存在が導かれることに注意する。

ところで排中律 [1] よりラッセル集合 $\mathcal{R}$ に対し、$\mathcal{R} \in \mathcal{R}$ または $\mathcal{R} \notin \mathcal{R}$ のいずれかが成り立つはずである。しかしながらいずれにしても矛盾が導かれることを以下で確認しよう。

まず $\mathcal{R} \in \mathcal{R}$ と仮定する。$\mathcal{R}$ は $\mathcal{R}$ の要素なので、$\mathcal{R}$ はラッセル集合の内包をみたす。すなわち $\mathcal{R} \notin \mathcal{R}$ となる。これは最初の仮定と矛盾する。

次に $\mathcal{R} \notin \mathcal{R}$ と仮定する。$\mathcal{R}$ は $\mathcal{R}$ に属さないので、$\mathcal{R}$ はラッセル集合の内包をみたさない。すなわち $\mathcal{R} \in \mathcal{R}$ となる。これは最初の仮定と矛盾する。

以上のことをまとめると、$\mathcal{R} \in \mathcal{R}$ または $\mathcal{R} \notin \mathcal{R}$ のいずれかが成り立つはずであるにもかかわらず、いずれからも矛盾が導かれてしまった。この要因は、排中律、またはラッセル集合の存在を認めてしまったことにある。ところで排中律を保証するのが古典論理で、ラッセル集合の存在を保証するのが内包公理であった。

したがってラッセルのパラドクスを回避するには、古典論理を制限するか、内包公理を制限する必要がある。前者、すなわち古典論理を制限する発想は、非古典論理上の素朴集合論を生み出した。後者、すなわち内包公理を制限する発想は、公理論的集合論、さらには後ほど紹介する逆数学を生み出した。

ラッセルのパラドクス以外のパラドクスも、内包公理を無制限に使用することにより矛盾が導かれる場合が多い。すなわち、パラドクスなどの困った状況を引き起こす要因は、非常に「大きい」集合であることが分かる。したがって内包公理の適用範囲を制限する発想は、パラドクスを回避するための自然な発想と言える。

本論文では通常用いられる古典論理の立場で議論するので、内包公理を制限することによる理論展開を概説することにする。

2.2　危機からの新展開

素朴集合論における内包公理を制限することによって種々のパラドクスを回避するための集合論が構築された。これらは、ラッセル集合等の問題を引き起こす集合を公理によって排除する発想から、公理論的集合論と呼ばれる。現在も活発に議論されている、ツェルメロ・フレンケル・ノイマンによる公理論的集合論 ZFC は有名である。現在でも ZFC がパラドクスを導くかどうかは解明されていないが [2]、ZFC はパラドクスを導かないであろうと信じられている。

公理論的集合論 ZFC は素朴集合論に比べ、その内包公理が制限されているとはいえ、現代の数学の土台とし

[1] 命題 P の否定を $\neg P$ で表すとする。排中律とは、どんな命題 P に対しても、「P または $\neg$P」は恒に正しいことを主張する命題である。例えば「明日は晴れる、または晴れない」は、明日の天気の状況に依らず正しいと考えられる。しかしながら排中律を認めない立場もある。有限的な人間である私たちがいつも排中律が正しいと言えるだろうか？例えば排中律によれば、「100 万年後に地球は存在する、または存在しない」は正しいことになるが、このような、私たちが到達し得ない内容を含む命題に対してもそれが正しいと断定できて良いのだろうか？このような疑問から排中律を（結果的に）認めない立場としてブラウアーの**直観主義**がある。直観主義論理を土台とした数学は、私たちが通常学習する数学の世界とは異なる結果を導くことがある。このような現象もまた非常に興味深いが、本論文では排中律を認めるいわゆる**古典論理**で議論を進めるので、ここでは直観主義の詳細には立ち入らない。

[2] これは本質的に困難な問題である。

ては十分すぎるほどに強い。そこで 1900 年代前半にヒルベルトは、ZFC をさらに制限した体系である、2 階算術 Z_2 でも、抽象的な集合論を直接には用いない古典的数学を支えるには十分であることを実証した。ここで 2 階算術 Z_2 とは、扱う対象を自然数とその集合に制限した体系で、ZFC から比べるとはるかに弱い。

1970 年代にフリードマンは、Z_2 の内包公理をさらに弱めた際、どれくらいの数学が展開できなくなるのかを調べた。彼の問題意識を言い換えると、「2 階算術 Z_2 の内包公理を適宜制限して得られる各種部分体系では、古典的数学をどれくらい展開できるか」となる。

上記研究を進めた結果フリードマンは次の逆数学現象を発見するに至る：

逆数学現象（フリードマン [1974 年]）

古典的数学のある定理 τ に着目する。
適切な集合存在公理 α から定理 τ を証明できるとき、**逆に**公理 α は定理 τ から証明できる。

すなわち、ある定理 τ に着目した際、それを証明するのに必要最低限の公理 α を選ぶと、逆に、その定理 τ から公理 α を導くことができることを述べている。必ずしもすべての定理に対し逆数学現象が観測されるわけではないが、フリードマンは彼の研究を進めていく中で多くの逆数学現象を発見し、あらゆる定理の逆数学現象を発見することを究極の目的とする、数学基礎論における一プログラム「**逆数学**」を創めた。

今までの流れをまとめると、内包公理を制限する発想は、素朴集合論の危機を回避するために生まれた。内包公理を制限する発想をさらに推し進めた結果、現在も活発に研究されている逆数学という分野を生み出した。このように数学は、その危機すらも内部に取り込んでしまうほど奥深く、知的興奮の尽きない学問の一つであると言える。

3 逆数学

本章では逆数学について少し詳しく解説する。また本章の最後では著者の研究について概説する。

3.1 2 階算術の部分体系

2 階算術の体系 Z_2 を最も制限して得られる体系として RCA_0 が知られている。この体系はおおよそ計算機が扱える数学を展開することができる体系である。すなわち、x が条件 $P(x)$ をみたすかどうかを計算機で判定できる場合に限り、集合として $\{x \mid P(x)\}$ が存在することを保証できる体系である。

体系 RCA_0 は例えば解析学の基本的な定理である「中間値の定理」や「平均値の定理」を証明することができる。しかし、同様に解析学の基本的な定理である「最大値の原理」や「連続関数のリーマン積分可能性」は RCA_0 で証明できない（ことを証明できる）。

そこで RCA_0 にもう少し強い内包公理を加えてられる体系が WKL_0 である。この体系は、弱ケーニッヒの補題と呼ばれる内包公理の一種を RCA_0 に加えて得られる体系で、解析学の多くの定理がこの体系と同値になる（逆数学現象）。先の「最大値の原理」や「連続関数のリーマン積分可能性」は WKL_0 と同値になる。WKL_0 に分類される定理については本論文の最初の表を参照せよ。

しかしながら、例えば大学の数学科 1 年で扱う解析学の基本的な定理である「コーシー列の収束性」は、WKL_0 で証明できない（ことを証明できる）。そこで算術的内包公理と呼ばれる、より強力な内包公理の一種を RCA_0 に加えて得られる体系 ACA_0 を考えると、「コーシー列の収束性」は体系 ACA_0 と同値になる。体系 ACA_0 と同値になる定理については最初のページの表を参照せよ。

体系 ACA_0 よりも強い体系として ATR_0 や Π^1_1-CA_0 が知られているが、これらと同値になるような古典的数学の定理は少ない。

現在までの逆数学の研究によって、**数学には多種多様な定理が存在するにもかかわらず、その多くが、上で挙げた 5 つの体系のいずれかと同値になる**ことが分かってきている。例外は存在するが、その例外もまた新たな研究の興味の対象となる。逆数学の研究成果は、Simpson のモノグラフ（Simpson[2]）にまとめられている。

3.2 著者の研究

著者は特に複素解析学の逆数学的研究を行ってきた。特に、ＪＡＩＳＴの横山啓太氏とリーマンの写像定理をその境界の複雑さによって 3 種類に分類することに成功した（Horihata and Yokoyama[1]）。その証明では横山氏が 2 階算術に導入した超準解析の手法を応用した。リーマンの写像定理は複素解析学でも基本的かつ重要な定理である。

次に、複素解析学における一致の定理について考えてみる。一致の定理の主張は次である：

（弱い形の）一致の定理

境界が線分からなる領域 $D \subseteq \mathbb{C}$ 上の正則関数 f と g をとる。点 $\alpha \in D$ をとる。もし D 内の点列 $\langle z_n \mid n \in \mathbb{N} \rangle$ が存在して $\lim_{n\to\infty} z_n = \alpha$ かつ任意の自然数 n に対し $z_n \neq \alpha$ かつ $f(z_n) = g(z_n)$ ならば、D 上 $f = g$ となる。

この定理は、D 内に収束する点列の各点で f と g が一致するならば、D 全体で f と g が一致してしまうことを主張している。例えば D 内の長さが 0 でない（非常に短い）線分上で f と g が一致すれば、D 全体で f と g が一致してしまうのである。つまり全体像が局所的な情報から決まってしまうことを主張していると解釈できる。逆数学現象を証明する際、この性質は非常に邪魔をする。

通常の数学においては、公理や既に知られている定理から新たな定理を証明していく。逆数学の場合は逆に、ある定理からどの内包公理が導けるかを探求する。このような "逆" を証明するためのテクニックがいくつか存在するが、頻繁に用いるのは、反例を作ることによって対偶を示すことである。

ある定理 τ から公理 α を導くためには、その対偶を示せばよい。すなわち、$\neg\alpha$ から $\neg\tau$ を示せばよい。通常 $\neg\alpha$ は、α が公理であることから、私たちの直観に反する内容をもつ。この仮定の下、$\neg\tau$ を示すのだが、その際に τ の反例を作る場合がある。すなわち、$\neg\alpha$ という奇妙な仮定の下、風変わりな例を構成することにより $\neg\tau$ を導く、という方法である。

しかしながら複素解析学において反例を作る際、先の一致の定理が、その自由度をかなり制限する。つまり、反例を作る際には、そのための局所的な性質をみたすように関数を構成していくが、一致の定理によって、そのわずかな局所的な情報を与えただけで関数が領域 D 上にまで広がって定義されてしまう。

そこでまず一致の定理が逆数学においてどの公理系と同値になるかを調べることにした。一致の定理は WKL_0 で証明可能であることはすぐにわかる。しかし逆については未解決である。一方、一致の定理の証明の本質には次の**テイラー展開可能性**が深くかかわっていることが明らかになった。

テイラー展開可能性

領域 $D \subseteq \mathbb{C}$ 上正則な関数 f はテイラー展開可能である。すなわち、任意の点 $\alpha \in D$ および $r > 0$ に対し、もし $B(\alpha, r) \subseteq D$ ならば、$\mathbb{C}$ 内のある点列 $\langle a_k \mid k \in \mathbb{N} \rangle$ が存在して $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-\alpha)^k$ と展開できる。

この主張を TEXP と書くことにする。このとき、先の弱い形の一致の定理は、$\mathsf{RCA}_0 + \mathsf{TEXP}$ で証明できることを示せた。この結果は、一致の定理を証明するには RCA_0 だけでは公理が足りない可能性があり、しかしテイラー展開可能性を仮定すると証明できることを意味する。すなわち、一致の定理の証明の本質はテイラー展開可能性であることが予想される。

この観点からも、TEXP は意味のある主張で、この主張自体がどの公理系と同値になるかも重要な課題である。なお TEXP は WKL_0 で証明できることは容易に示せる。よって TEXP が WKL_0 と同値になるのか、あるいは RCA_0 で証明できてしまうのか、あるいは RCA_0 と WKL_0 の間に来る可能性もある。3 つめのケースになった場合は非常に興味深い結果となる。

さらに TEXP は「正則写像の最大値の原理」や「正則写像の積分の平均値の定理」と同値である。これら 2 つの定理もまた、WKL_0 で証明はできるもののその逆についてはわかっていない。しかしながら TEXP と同値になることから、TEXP の分類に成功すれば自動的にこれらの定理も同様に分類されることが分かる。

テイラー展開可能性 TEXP の逆数学的分類は今後取り組むべき課題であるといえる。また一致の定理の逆数学的分類を行い、一致の定理が成り立たない世界での反例となる特異な関数の構成の可能性を模索していきたい。

結語

ある定理に着目し，その証明に不要な公理を極限までそぎ落とし，必要十分な公理を特定する逆数学の実践は，「数学における "エコ" の実践」と呼べないであろうか．逆数学の思想を想うと、スコラ哲学者オッカムの次の原則を思い出さずにはいられない。

オッカムの剃刀

ある物事を説明するためには、必要以上の前提を仮定すべきでない

参考文献

[1] Y. Horihata and K. Yokoyama, *Nonstandard second-order arithmetic and Riemann's mapping theorem*, Annals of Pure and Applied Logic, Volume 165, Issue 2, p 520-551, 2014.

[2] S. G. Simpson, **Sumsystems of Second Order Arithmetic**, Perspectives in Mathematical Logic, Springer-Verlag, XIV +445 pages, 1999;
Second edition, Perspectives in Mathematical Logic, Archive for Symbolic Logic, Cambridge University Press, XVI +449 pages, 2009