

研究タイトル:

逆数学, 数学的態度とリベラルアーツ



氏名: 堀畑 佳宏 / HORIHATA Yoshihiro E-mail: horihata@yonago-k.ac.jp

職名: 准教授 学位: 博士(理学)

所属学会・協会: 日本数学会, 日本数学教育学会, 科学基礎論学会

キーワード: 逆数学, 不完全性定理, 数学的態度, リベラルアーツ, 文字列に関する理論, 理論間の翻訳

技術相談

提供可能技術:

- 「数学」や「数学とリベラルアーツ」に関する講演、出前講座を実施します。対象は中学生、高校生、大学生、社会人。内容は応相談。
- 数学基礎論全般、特に形式体系の決定可能性や翻訳関係についての相談を受けられます。

研究内容 1: 文字列に関する理論と算術の理論の翻訳可能性と決定不能性 (論文[1])

ゲーデルの不完全性定理は、和と積を演算にもつ公理体系(数に関する理論)にどれだけ公理を追加したとしても、その体系から証明も反証(否定の証明)もできない命題が存在することを意味します。一方、文字列の結合のみを演算にもつ理論が2005年にグルゼゴルジェクによって導入され、この理論にも不完全性定理が成り立つことが証明されました。数に関する理論は「そろばん」を、文字列に関する理論は「読み書き」を表現した理論と捉えられます。2009年には文字列に関する理論 TC と算術の理論 Q が互いに翻訳可能であることが証明されました。このことは、**一見異なる「読み書きの能力」と「そろばんの能力」が、実は密接な関係にある**ことを示しています。

本研究では、著者が新たに導入した、TC より非常に弱い公理体系 WTC と、タルスキらによる算術 R が互いに**翻訳可能**であることを証明しました。さらに日本大学の樋口氏と共同で、WTC は決定不能な理論のうち極小なものになっていることを証明しました。今後は、TC よりも強い理論と算術の関係を調べていきます。また弱い集合論の公理体系を新たに導入し、読み書きやそろばんに関する理論との翻訳関係を構築し、これらの体系を統一的に分析していきます。

研究内容 2: 数学, 特に複素解析学の逆数学的分析 (論文[2],[3],[8])

逆数学とは、数学の定理達の世界に等高線を引く学問です。詳しくは①ある定理の証明に必要な十分な公理を特定し、②その公理の強さ(等高線の基準)で定理を分類します。このとき逆に定理からその公理を証明できる現象が起きる(**逆数学現象**)ため、逆数学と呼ばれています。数学は多くの公理(仮説)の上に建設されています。しかし一般に定理の証明に必要な公理はごく僅かです。そこでその証明に不要な公理を取り除く(オッカムの剃刀)ことで、その定理のある種の難易度・**抽象度**が分かります。この意味で逆数学は、**数学における省エネルギーの実践**とも言えます(SDGs)。

興味深い点は、数学には多種多様な定理が存在するにも拘らずその多くが約 5 つの等高線に分類されます(例外もある)。また解析、代数、幾何などの分野を跨ぎ、同じ等高線に分類された定理間に**類似性**を見てとれる点も大変興味深いです。

代表的な 4 つのカテゴリーに分類される定理の例を下の表に載せています。左列は公理体系の名前で、右側は左の公理体系に属する定理です。数学の 3 大分野(解析学、代数学、幾何学)ごとに分けて書いています。上にあがるほどより強力な公理を必要とする定理となります。赤字の定理の結果は東北大学の横山氏との共同研究の結果です。本研究によって WWKL₀ という公理体系が複素解析学においては重要な役割を果たすことが分かってきました。弱リーマンの写像定理を分類できたことで、複素解析学の逆数学で新たな研究領域の開拓に繋がることが期待できます。

公理体系	解析学の定理	代数学の定理	幾何学の定理
ACA ₀	コーシー列の収束性, ボルツァノ/ワイエルシュトラスの定理, リーマンの写像定理	極大イデアルの存在 ベクトル空間の基底の存在	
WKL ₀	連続関数の可積分性, コーシーの積分定理 ジョルダン領域に対するリーマンの写像定理	素イデアルの存在 代数閉包の唯一存在	ブラウアーの不動点定理 持ち上げ補題
WWKL ₀	有界連続関数の可積分性, 単調収束定理		
RCA ₀	中間値の定理, 平均値の定理 多角形領域に対するリーマンの写像定理	代数学の基本定理 有限次元ベクトル空間の基底の存在	

研究内容 3: 数学的態度とリベラルアーツ (論文[4],[7])

ある命題 A の説明(証明)は、「A なぜならば B」(このことを $A \leftarrow B$ と書くことにする)、「B なぜならば C」($B \leftarrow C$)、…と繰り返されます。しかし「完結」させるにはどこか有限で止める必要があります。その止めた命題(矢印のスタート地点)を「仮説」と言います。 $A \leftarrow B \leftarrow C \leftarrow \dots \leftarrow X$ だとすると X を仮説としています。仮説の違いが学問の違いです。さらに私達の思考も過去や経験に依る無数の仮説(意識的にも無意識的にも)から作られていると考えられます。

思考は全て、根拠を遡れば仮説に行きつきます。無条件で正しい命題は存在しません。そこで私は「全ては仮説である」という認識の下に世界に対峙する姿勢を**数学的態度**と名付けました(論文[4])。数学は科学と異なり対象が言語なので、仮説(公理)は無矛盾であれば何でも良いという自由さがあります。その自由さから数学的態度と名付けました。

数学的態度があつて人は**学ぶ**ことができます。「自分が正しい」と考える人は他から学べません。また経験や思考を通じ自分の中の無意識の仮説(過去に作られた)に気づき相対化することで、より**自由になる**ことができます。また数多ある情報のどれを重要に感じて拾うかは、その人がもつ仮説で決まります(論文[7])。極端に言えば、仮説が変われば「事実」も変わります。さらに仮説が抽象的であればある程、広い世界が自分にとって重要で興味深く思えてきます。しかし抽象的な仮説を構築できるためには勉強や思考、リベラルアーツが必要です。数学は、言い換えれば言語の世界の自由の限界を探求する学問です。言語の世界で自由な振る舞い(作法)ができなければ、現実でも自由になれません。数学を学ぶ・研究する理由として「**自由になるため**」があると私は考えます。自由になるためのリベラルアーツ、その土台としての数学、という観点で数学的態度とその実践についての研究を続けていきます。

担当科目	基礎数学 A, 微分積分 I, 線形代数 A, 解析 I, 応用数学特論, PBL, 地域学
過去の実績	<ul style="list-style-type: none"> ◆研究集会主催(毎年実施) 山陰 基礎論・解析学研究集会 第 7 回 2020 年 1 月 12 日 発表 9 件, 参加者 15 名 @コンベンションセンター ◆高専学生の研究発表会共催(津山高専松田修先生との共催. 毎年実施) 2020 年 2 月 22 日・23 日 高専生の数学研究に関する研究集会 発表 18 件 ◆NHK 文化センター講師 一般市民向けの数学の講座を開講(計 4 回実施) 2020 年 6 月 13 日『数学で世界を旅しよう 4』 ◆地域交流(公開講座など)(毎年実施) ◇公開講座 ①エンジョイ科学館 ②数学とプログラミング ③リケジョ講座 ◇数学イベント ④トキメキ☆算数教室(児童文化センター) ⑤とっとりサイエンスワールド ◆テレビ出演 鳥取県民チャンネルコンテンツ協議会 米子高専 知的セミナー 出演 2013 年 5 月『無限を数える①』6 月『無限を数える②』7 月『身近に存在する数学』 ◆米子高専教員研究発表会主催 弓ヶ浜セミナー (計 11 回実施, 2022 年 3 月現在)
近年の業績 (研究・教育論文, 特許含む)	<ul style="list-style-type: none"> ◆学術論文【査読有り】(他 1 件) [1] K. Higuchi and Y. Horihata, <i>Weak theories of concatenation and minimally essential undecidability.</i> Archive for Mathematical Logic, Volume 53, Issue 7-8, pp.835-853 (2014) [2] Y. Horihata and K. Yokoyama, <i>Nonstandard second-order arithmetic and Riemann's mapping theorem.</i> Annals of Pure and Applied Logic, Volume 165, Issue 2, pp.520-551 (2014) ◆学術論文【査読無し】(他 1 件) [3] 堀畑 佳宏, 弱い 2 階算術におけるリーマンの写像定理 数理解析研究所講究録 1832「証明論と複雑性」, pp.19-32 (2013) ◆教育研究論文【査読有り】(他 6 件) [4] 堀畑 佳宏, 数学的態度について (1) 日本数学教育学会 高専・大学部会論文誌第 26 号, No 1, pp.80-87 (2020) [5] A. Takeuchi, Y. Horihata, et al., <i>Introduction of Liberal Arts Discourse Meeting.</i> ISATE 2019, Volume 23, Issue 3 pp.224-229 (2019) [6] 竹内 彰継, 堀畑 佳宏, 他, 米子高専のリベラルアーツ談話会 工学教育 66 巻, 6 号, pp.98-103 (2018) ◆教育研究論文【査読無し】(他 2 件) [7] 堀畑 佳宏, 数学的態度について(2) ~教養と数学的態度~ 米子高専研究報告 56, pp.11-15 (2021) ◆一般雑誌記事 [8] 堀畑 佳宏, 複素解析学の基礎と逆数学 数学セミナー2 月号, 日本評論社, pp.36-39 (2021)