

研究タイトル：逆数学，数学的態度とリベラルアーツ

～数学を通じて自由になろう～

氏名：堀畑 佳宏／HORIHATA Yoshihiro E-mail: horihata@yonago-k.ac.jp

職名：准教授 学位：博士（理学）

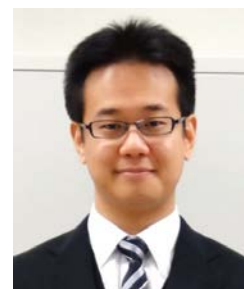
所属学会・協会：日本数学会，日本数学教育学会，科学基礎論学会

キーワード：数学的態度，自由意志，リベラルアーツ，逆数学，不完全性定理，理論間の翻訳

技術相談

提供可能技術：

- 数学と自由，リベラルアーツに関する講演，出前講座を実施します。対象は中学生，高校生，大学生，社会人。内容は応相談。
- 科学基礎論全般，特に形式体系の決定可能性や翻訳関係についての相談を受けられます。



研究内容 1：文字列に関する理論と算術の理論の翻訳可能性と決定不能性（論文[1]）

ゲーデルの不完全性定理は，和と積を演算にもつ公理体系（数に関する理論）にどれだけ公理を追加したとしても，その体系から証明も反証（否定の証明）もできない命題が存在することを意味します。一方，文字列の結合のみを演算にもつ理論が 2005 年にグルゼゴルジエクによって導入され，この理論にも不完全性定理が成り立つことが証明されました。数に関する理論は「そろばん」を，文字列に関する理論は「読み書き」を表現した理論と捉えられます。2009 年には文字列に関する理論 TC と算術の理論 Q が互いに翻訳可能であることが証明されました。このことは，一見異なる「読み書きの能力」と「そろばんの能力」が，実は密接な関係にあることを示しています。

本研究では，著者が新たに導入した，TC より非常に弱い公理体系 WTC と，タルスキらによる算術 R が互いに翻訳可能であることを証明しました。さらに日本大学の樋口氏と共同で，WTC は決定不能な理論のうち極小なものになっていることを証明しました。今後は，TC よりも強い理論と算術の関係を調べていきます。また弱い集合論の公理体系を新たに導入し，読み書きやそろばんに関する理論との翻訳関係を構築し，これらの体系を統一的に分析していきます。

研究内容 2：数学，特に複素解析学の逆数学的分析（論文[2],[3],[8]）

逆数学とは，数学の定理達の世界に等高線を引く学問です。詳しくは①ある定理の証明に必要な十分な公理を特定し，②その公理の強さ（等高線の基準）で定理を分類します。このとき逆に定理からその公理を証明できる現象が起きる（逆数学現象）ため，逆数学と呼ばれています。数学は多くの公理（仮説）の上に建設されています。しかし一般に定理の証明に必要な公理はごく僅かです。そこでその証明に不要な公理を取り除く（オッカムの剃刀）ことで，その定理のある種の難易度・抽象度が分かります。この意味で逆数学は，数学における省エネルギーの実践とも言えます。

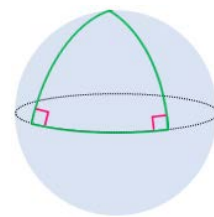
興味深い点は，数学には多種多様な定理が存在するにも拘らずその多くが約 5 つの等高線に分類されます（例外もある）。また解析，代数，幾何などの分野を跨ぎ，同じ等高線に分類された定理間に類似性を見てとれる点も大変興味深いです。

代表的な 4 つのカテゴリーに分類される定理の例を下の表に載せています。左列は公理体系の名前で，右側は左の公理体系に属する定理です。数学の 3 大分野（解析学，代数学，幾何学）ごとに分けて書いています。上にあがるほどより強力な公理を必要とする定理となります。赤字の定理の結果は東北大学の横山氏との共同研究の結果です。本研究によって WWKL₀ という公理体系が複素解析学においては重要な役割を果たすことが分かってきました。弱リーマンの写像定理を分類できたことで，複素解析学の逆数学で新たな研究領域の開拓に繋がることが期待できます。

公理体系	解析学の定理	代数学の定理	幾何学の定理
ACA ₀	コーシー列の収束性，ボルツァノ/ワイエルシュトラスの定理，リーマンの写像定理	極大イデアルの存在 ベクトル空間の基底の存在	
WKL ₀	連続関数の可積分性，コーシーの積分定理 ジョルダン領域に対するリーマンの写像定理	素イデアルの存在 代数閉包の唯一存在	ブラウアーの不動点定理 持ち上げ補題
WWKL ₀	有界連続関数の可積分性，単調収束定理		
RCA ₀	中間値の定理，平均値の定理 多角形領域に対するリーマンの写像定理	代数学の基本定理 有限次元ベクトル空間の基底の存在	

研究内容 3: 数学的態度とリベラルアーツ ～数学を通じて自由になろう～ (論文[4]～[7])

数学と自由の関係についてどうお考えでしょうか？両者は対極にあると思われるかもしれませんが。その側面があるのは確かです。但しそれは「数学における土台(公理, 仮説)を固定したのなら」という条件付きの場合に於いてです。土台を固定したあとは、論理的推論を駆使して定理を導きます。その過程に論理以外が入り込む余地はありません。その意味で自由と対極にあると言えます。しかし数学の土台は1つではありません。例えば、私たちは「三角形の内角の和は 180° である」と覚えています。そうでない「世界」もあり得ます。実際、地球のような球面上で三角形を考えると少し膨らんだ形になり、その内角の和は 180° を超えます(右図)。別の土台を考えることで 180° 未満にすることもできます。これらは単なる空想ではなく、例えば相対性理論の考え方の基礎になっており、GPS などの現代技術を可能にしました。



新しい技術を生み出すには、それに先立って「自由な空想」が必要です。つまり仮説を自由に設定できる力が重要となります。仮説の設定の自由さを持っている学問が数学です。全ての定理は、その証明を逆にたどれば必ず公理(仮説)に行きつきます。その意味で、無条件に正しい命題は存在しません。公理が変われば「正しさ」も変わります。このような背景から私は、「全ては仮説であるという認識の下に世界に対峙する姿勢」を**数学的態度**と名付け(論文[6])、数学的態度とその涵養・教育方法、自由意志、リベラルアーツとの関係について研究を行っている(論文[4][5][7])。

数学的態度から導けることとして①「平等の精神」、②「学習可能性」、③「幸福の精神」が挙げられます。無条件な正しさは存在しないことから①が得られます。また「自分は間違っているかもしれない」、「相手が正しいかもしれない」という認識から②が得られます。逆に「自分は正しい」と思いこんでいる人は世界や他者から学ぶことはできません。そして日常や生が決して当たり前ではないという認識は③を生みます。つまり日常の非日常性を認識し感謝できることで幸福へとつながります。これらを総合し、数学的態度の涵養は自由へと繋がると考え、現在も研究を続けております。

担当科目	基礎数学 A, 微分積分 I, 線形代数 A, 微分積分 II A, 応用数学特論
過去の実績	◆研究会主催(毎年実施) 山陰 数学と基礎論研究集会 第9回 2024年1月6日・7日 発表16件, 参加者42名 @コンベンションセンター ◆高専学生の研究発表会共催(津山高専松田修先生との共催, 毎年実施) 2023年10月28日 高専生の数学研究に関する研究集会 発表9件 ◆補助金 とっとりサイエンスワールド(県補助金) 2023年度120万円, 2022年度90万円 ◆地域貢献活動(毎年実施) ①とっとりサイエンスワールド(西部, 中部, 東部) ②エンジョイ科学館 ③ジュニアドクター ◆NHK 文化センター講師 一般市民向けに数学の講座を実施(兼務, 計4回実施) ◆テレビ出演 鳥取県民チャンネルコンテンツ協議会 知的セミナー (計3回出演)
近年の業績 (研究・教育論文, 特許含む)	◆科研費 2022-2025 挑戦的研究(萌芽) 研究課題 22K18640 ◆学術論文【査読有り】(他1件) [1] K. Higuchi and Y. Horiata, <i>Weak theories of concatenation and minimally essential undecidability,</i> <i>Archive for Mathematical Logic</i>, Volume 53, Issue 7-8, pp.835-853 (2014) [2] Y. Horiata and K. Yokoyama, <i>Nonstandard second-order arithmetic and Riemann's mapping theorem,</i> <i>Annals of Pure and Applied Logic</i>, Volume 165, Issue 2, pp.520-551 (2014) ◆学術論文【査読無し】(他1件) [3] 堀畑 佳宏, 弱い2階算術におけるリーマンの写像定理 数理解析研究所講究録 1832「証明論と複雑性」, pp.19-32 (2013) ◆教育研究論文【査読有り】(他8件) [4] Y. Horiata, <i>Mathematical attitude, hypotheses, and freedom</i> ICME 2024 論文集, 受理 (数学教育世界会議), (2024) [5] Y. Horiata, <i>Mathematical attitude and the liberal arts,</i> ISATE 2023 論文集 (国際工学教育研究集会), (2023) [6] 堀畑 佳宏, 数学的態度について (1) 日本数学教育学会 高専・大学部会論文誌, 第26号, No 1, pp.80-87 (2020) ◆教育研究論文【査読無し】(他2件) [7] 堀畑 佳宏, 数学的態度について(2) ～教養と数学的態度～ 米子高専研究報告 56, pp.11-15 (2021) ◆市販雑誌寄稿 [8] 堀畑 佳宏, 複素解析学の基礎と逆数学 数学セミナー2月号, 日本評論社, pp.36-39 (2021)